Semi-anneau de fusion des groupes quantiques

Colin Mrozinski

N° d'Ordre : D.U. 2405

UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL
U.F.R. Sciences et Technologies
ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES FONDAMENTALES

THÈSE

Présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITÉ

Spécialité :
MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES

Par **Colin MROZINSKI**

Semi-anneau de fusion des groupes quantiques

Soutenue publiquement le 05 décembre 2013, devant la commission d'examen.

Président :	François Dumas	Professeur	
Examinateurs :	Saad Baaj	Professeur	
	Teodor Banica	Professeur	(Rapporteur)
	Julien Bichon	Professeur	(Directeur)
	Alain Bruguières	Professeur	(Rapporteur)
	Christian Ohn	Maître de conférence	

Semi-anneau de fusion des groupes quantiques

Résumé Cette thèse se propose d'étudier des problèmes de classification des groupes quantiques *via* des invariants issus de leur théorie de représentation. Plus précisement, nous classifions les algèbres de Hopf possédant un semi-anneau de fusion isomorphe à un groupe algébrique réductif donné G. De tels groupes quantiques sont alors appelés G-déformations. Dans cette thèse, nous étudions les cas $GL(2)$ et $SO(3)$. Nous donnons une classification complète des $GL(2)$-déformations en construisant une famille d'algèbres de Hopf indexées par des matrices inversibles. Nous décrivons leurs catégories de comodules et donnons certains résultats de classification quant à leurs objets de Hopf-Galois. Ensuite, nous donnons une classification des $SO(3)$-déformations compactes tout en étudiant le cas non-compact. Finalement, la dernière partie de la thèse est une étude de l'algèbre sous-jacente à une certaine famille d'algèbres de Hopf, dont nous exhibons une base. Cette base nous permet de calculer le centre des ces algèbres ainsi que quelques groupes de (co)homologie.
Mots-clés Groupes quantiques, théorie de représentation, semi-anneau de fusion, algèbre non-commutative, catégories monoïdales, objets de Hopf-Galois.

Fusion semiring of quantum groups

Abstract The purpose of this dissertation is to classify quantum groups according to invariants coming from their representation theory. More precisely, we classify Hopf algebras having a fusion semiring isomorphic to that of a given reductive algebraic group G. Such a quantum group is called a G-deformation. We study the case of $GL(2)$ and $SO(3)$. We give a complete classification of $GL(2)$-deformations by building a family of Hopf algebras parametrized by invertible matrices. We describe their comodule category and we give some classification results about the Hopf-Galois objects. We also classify compact $SO(3)$-deformations and we study the noncompact case. Finally, the last part of this dissertation is a study of the underlying algebra of some Hopf algebras, for which we exhibit a linear basis. This basis allows us to compute the centre and some (co)homology groups of those algebras.
Key words Quantum groups, representation theory, fusion semiring, noncommutative algebra, monoidal category, Hopf-Galois objects.

Laboratoire où la thèse a été préparée

Laboratoire de Mathématiques (UMR 6620)
Université Blaise Pascal
Complexe universitaire des Cézeaux
BP 80026
63171 Aubière Cedex, France

“Lorsqu’elles ont atteint la voûte du ciel, ces âmes qu’on dit immortelles passent à l’extérieur, s’établissent sur le dos du ciel, se laissent emporter par leur révolution circulaire et contemplent les réalités qui se trouvent hors du ciel.”

Phèdre, Platon

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Julien Bichon, de m'avoir fait découvrir les groupes quantiques durant mon stage de Master 2, puis d'avoir accepté d'encadrer mon travail de thèse. Sa patience et ses conseils ont su me guider dans mon apprentissage de la recherche tandis que sa culture et sa rigueur ont su marquer de manière indélébile ma vision des idées mathématiques.

Je souhaite remercier Teodor Banica et Alain Bruguières de m'avoir fait l'honneur de lire mon travail et d'avoir accepté de rapporter ma thèse. De plus, je remercie sincérement Saad Baaj, François Dumas et Christian Ohn d'avoir accepté d'être présents au sein de mon jury.

Ce manuscrit est le résultat de dix années d'études, et je tiens à saisir l'occasion qui m'est offerte ici pour remercier chaque enseignant dont l'enthousiasme et la culture mathématique ont déteint sur moi. La passion qui m'anime désormais est bâtie sur la somme de ces personnalités tandis que la curiosité qui me pousse provient de l'assemblage des questions qu'elles ont soulevées devant moi. Dresser une liste exhaustive m'exposerait au risque d'oublier l'une de ces personnes essentielles : je ne le ferai donc pas. Mais, à nouveau, merci.

Ces trois années furent l'occasion de changer de statut en assumant de nouvelles responsabilités au sein du département puis du laboratoire. Il me faut donc remercier les personnes ayant rendu cette transition agréable. En particulier, je remercie Henri Dichi, Laurent Chupin et Saad Baaj sous la tutelle de qui j'ai assuré certains TD au cours de ces trois années. Je remercie de plus les membres du conseil du laboratoire de m'avoir fait une place lors de ses réunions. Finalement, je pense également à Arnaud Guillin, Mickael Heusener et François Martin pour leurs nombreux conseils et coups de pouce dans le cadre de l'organisation du Colloque Inter' Action.

Je remercie spécialement mes camarades doctorants, dont les discussions au café ou au séminaire ont été particulièrement stimulantes. Merci au bureau 2210 pour sa convivialité. Un merci tout particulier à Romuald, dont l'amitié m'a souvent sorti de l'inquiétude et lui a permis de supporter mes périodes de déconcentration. Mes pensées se tournent aussi vers Damien, dont j'envie désormais les étudiants. Merci à Kevin et Amaury de me faire partager tant leur culture que leur passion.

Ces remerciements seraient incomplets si je ne mentionnais pas ceux sans qui le laboratoire ne pourrait pas fonctionner. Merci donc à Cédric et Damien pour leur disponibilité, Karine, Laurence, Marie-Paule, Séverine et Valérie pour leur gentillesse, leur disponibilité et leur attention, et enfin merci à Annick pour sa bonne humeur et sa patience face à

l'accumulation de livres sur mon bureau.

Dans une perspective plus personnelle, il est nécessaire de remercier mes parents, d'abord en toute généralité, pour leurs encouragements, puis plus particulièrement Lou et Florent, sur qui je me suis parfois défoulé pendant ces années de colocation, et ma mère, pour son infini soutien.

Finalement, un merci passionné à Claire, dont l'existence m'est essentielle.

Table des matières

Remerciements **iii**

Table des matières **vii**

Introduction **xi**

I Groupes Quantiques **1**

1 Algèbres de Hopf **3**
1.1 Préliminaires 3
1.2 Groupes quantiques 7

2 Représentations des groupes quantiques **9**
2.1 Catégories Monoïdales ([38], [44]) 9
2.2 Comodules sur une algèbre de Hopf ([38], [40]) 10
2.3 Comodules semisimples ([40]) 13
2.4 Algèbres de Hopf compactes 14
2.5 Semi-anneaux de représentations 14

3 Équivalences monoïdales **15**
3.1 Objets de Hopf-Galois 15
3.2 Le Théorème de Schauenburg 17

4 Cohomologie ([25, 55, 17]) **19**
4.1 Cocycles ([25, 55]) 19
4.2 Cohomologie paresseuse ([17]) 20

5 Cogroupoïdes ([15]) **21**

6 Le lemme du diamant ([11]) **23**

II Groupes quantiques de type de représentation $GL(2)$ **25**

7 Résumé de l'article "Quantum groups of $GL(2)$ representation type" **27**
7.1 L'algèbre de Hopf $\mathcal{G}(A, B)$ 27
7.2 Le cogroupoïde $\mathcal{G}$ 29
7.3 Les $GL(2)$-déformations 30

7.4 Objets de Hopf-Galois de $\mathcal{G}(A,B)$ 31
7.5 Le cas compact 31

8 Quantum groups of $GL(2)$ representation type ([47]) 33
8.1 Introduction and main results 33
8.2 The Hopf algebra $\mathcal{G}(A,B)$ 35
8.3 The cogroupoid $\mathcal{G}$ 37
8.4 $GL(2)$-deformations 40
8.5 Hopf-Galois objects over $\mathcal{G}(A,B)$ 46
8.6 Hopf $*$-algebras structure on $\mathcal{G}(A,B)$ 51
8.7 Appendix : proof of Lemma 8.12 53

III Groupe quantique d'automorphismes et $SO(3)$-déformations 61

9 Résumé de l'article "Quantum automorphism group and $SO(3)$-deformations" 63
9.1 Préliminaires 63
9.2 $SO(3)$-déformations : le cas compact 66
9.3 Théorie des représentations du groupe quantique d'automorphismes 68
9.4 $SO(3)$-déformations : le cas général 70

10 Quantum automorphism groups and $SO(3)$-deformations ([48]) 73
10.1 Introduction and main results 73
10.2 Preliminaries 74
10.3 The quantum automorphism group $A_{\mathbf{aut}}(A,\varphi)$ 76
10.4 $SO(3)$-deformation : the compact case 77
10.5 Representation theory of quantum automorphism groups 88
10.6 $SO(3)$-deformations : the general case 92
10.7 Appendix : Proof of Lemma 10.23 96

IV Le centre de l'algèbre de Hopf associée à une forme bilinéaire non-dégénérée 105

11 Le centre de $\mathcal{B}(E)$ 107
11.1 Le groupe quantique d'une application bilinéaire non-dégénérée 107
11.2 Une base de $\mathcal{B}(E)$ 108
11.3 Le centre de $\mathcal{B}(E)$ 111
11.4 Quelques calculs d'homologie 111

Bibliographie 113

Introduction

Dans un exposé au Congrès international des mathématiciens en 1986 ([26]), Drinfel'd définit la catégorie des groupes quantiques comme la catégorie opposée à celle des algèbres de Hopf (non-nécessairement commutatives). L'intérêt fondamental de cette approche est de donner une saveur géométrique à la théorie des algèbres de Hopf (théorie par ailleurs déjà bien établie, voir [1] pour un aperçu historique).

La motivation de Drinfel'd provient des exemples, en lien avec la physique, développés par Faddeev, Reshetikhin et Takhtajan ([31]), Takeuchi ([58]) et Jimbo ([36]). Ces exemples incluent en particulier les q-quantifications de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie semisimple, q étant un paramètre complexe ou formel qui déforme l'algèbre classique. À la même époque, Woronowicz introduisit la notion de groupe quantique compact ([68, 72]). La théorie qu'il développe est remarquablement proche de celle des groupes compacts classiques. En particulier, il prouve l'existence d'une mesure de Haar et fait la théorie de Peter-Weyl de tels groupes quantiques. Rosso montre dans [54] que les exemples de Faddeev, Reshetikhin et Takhtajan et Jimbo rentrent dans le cadre défini par Woronowicz. Ensuite, Wang ([65, 66]) donnera de nouveaux exemples de groupes quantiques compacts, dits groupes quantiques compacts *libres*, qui seront étudiés par Banica dans [3, 4, 6] et généralisés au niveau purement algébrique dans [27, 12]. Plus récemment, Kustermans et Vaes ([42, 43]) ont donné une définition des groupes quantiques localement compacts.

Les groupes quantiques forment désormais une thématique à la jonction de plusieurs domaines tels que l'algèbre non-commutative, les algèbres d'opérateurs ou la théorie des catégories.

Parmi les aspects de la théorie des groupes qui gardent un sens dans le cadre quantique, cette thèse s'intéresse particulièrement à la théorie des représentations. Dans ce contexte, la catégorie des représentations d'un groupe quantique est remplacée par la catégorie des comodules d'une algèbre de Hopf. Cette thèse se propose de classifier les groupes quantiques suivant certains invariants provenant de leur théorie de représentations.

Le premier élan de notre démarche est de classifier les groupes quantiques suivant leur semi-anneau de représentations. Pour un groupe algébrique G, le semi-anneau de représentations (aussi appelé semi-anneau de fusion ou semi-anneau de Grothendieck), noté $\mathcal{R}^+(G)$, est un objet qui code à la fois les classe d'isomorphismes des représentations irréductibles du groupe et les règles de décompositions en somme directe de représentations simples des produits tensoriels de représentations irréductibles (règles de fusion). Le semi-anneau de représentations est un invariant extrêmement fort. En particulier, d'après McMullen ([45]), si G_1 et G_2 sont des groupes algébriques réductifs et connexes sur $\mathbb{C}$ tels que $\mathcal{R}^+(G_1) \simeq \mathcal{R}^+(G_2)$, alors $G_1 \simeq G_2$.

Étant donnée une algèbre de Hopf H, on peut définir de même le semi-anneau de coreprésentations de H, noté $\mathcal{R}^+(H)$, qu'on considère alors comme le semi-anneau de représentations du groupe quantique sous-jacent. La définition suivante donne l'objet d'étude principal de cette thèse.

Définition. Soit G un groupe algébrique réductif et soit $\mathcal{O}(G)$ son algèbre de fonctions régulières. On dit qu'une algèbre de Hopf H cosemisimple est une *G-déformation* si $\mathcal{R}^+(H) \simeq \mathcal{R}^+(\mathcal{O}(G))$.

On cherche donc, dans un premier temps, à classifier les G-déformations, pour G un groupe algébrique réductif donné. Ce problème a déjà été considéré par de nombreux auteurs, voir [70, 69, 71, 3, 5, 51, 50, 52, 33, 13]. Le problème a été complètement résolu dans certains cas particuliers, notamment celui de $SL(2)$ dans [3, 13]. La situation se complique considérablement lorsque le rang de G augmente. Déjà dans le cas de $SL(3)$, étudié dans [50, 52], apparaissent de nombreux exemples qu'il semble difficile d'unifier. Notons qu'une version catégorique du problème, c'est-à-dire classifier les catégories semisimples, monoïdales et rigides ayant les mêmes règles de fusion qu'un groupe algébrique réductif G, semble plus approchable et a été étudié dans [61, 39]. Dans cette thèse, on s'intéresse plus particulièrement aux cas $G = GL(2), U(2)$ et $SO(3)$.

En général, les méthodes que nous utilisons pour reconstruire un groupe quantique d'après son semi-anneau de représentations imposent de considérer la catégorie des comodules de certaines algèbres de Hopf. On cherche alors à décrire ces catégories et à classifier ces algèbres de Hopf à équivalence monoïdale près.

Définition. On dira que deux algèbres de Hopf sont monoïdalement équivalentes si il existe une équivalence de catégories monoïdales entre leurs catégories de comodules.

Notons qu'une équivalence monoïdale implique un isomorphisme au niveau du semi-anneau de représentations.

Ce manuscrit s'articule en quatre parties.

La première prolonge cette introduction et regroupe plusieurs définitions relatives aux groupes quantiques et à leurs représentations. On définit notamment la catégorie des comodules d'une algèbre de Hopf, analogue de la catégorie des représentations d'un groupe quantique, et on explique comment la structure d'algèbre de Hopf permet de la munir d'une structure monoïdale et d'une dualité.

Ensuite, nous nous intéressons aux équivalences monoïdales et présentons des moyens de les construire. On décrit la théorie des objets galoisiens et bigaloisiens, qui culmine avec le théorème de Schauenburg ([55, 56]). Ce théorème énonce l'équivalence entre l'équivalence monoïdale de deux algèbres de Hopf et l'existence d'un objet bigaloisien pour ces algèbres de Hopf.

Nous définissons plusieurs déformations d'une algèbre de Hopf associées à des cocycles. La catégorie de comodules d'une algèbre de Hopf n'est pas altérée par la déformation.

On poursuit cette partie en présentant le formalisme des cogroupoïdes. Cette théorie est équivalente à la théorie des objets galoisiens et bigaloisiens et c'est dans ce cadre que nous nous placerons systématiquement pour construire des équivalences monoïdales.

On conclut en présentant un résultat bien connu, le lemme du diamant ([11]), qui fournit une méthode pour exhiber une base algébrique d'une algèbre de type fini.

La deuxième partie contient notre premier article, "Quantum groups of $GL(2)$ representation type" ([47]) à paraître dans *Journal of Noncommutative Geometry*, précédé d'un résumé en français (sans démonstration). On s'intéresse à classifier les groupes quantiques possédant un semi-anneau de représentations isomorphe à celui de $GL(2)$, autrement dit les $GL(2)$-déformations. Cela nous amène à définir une nouvelle famille d'algèbres de Hopf, indexées par des couples de matrices $A, B \in GL_n(k)$ (où k est un corps algébriquement clos) et notées $\mathcal{G}(A, B)$. Il s'agit de l'algèbre universelle engendrée par les générateurs $x_{ij} (1 \leq i, j \leq n), d, d^{-1}$ soumis aux relations

$$x^t A x = A d, \quad x B x^t = B d, \quad d d^{-1} = 1 = d^{-1} d,$$

où x est la matrice $(x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Notons que, pour $q \in k^*$, il existe $A_q \in GL_2(k)$ tel que $\mathcal{G}(A_q, A_q) = \mathcal{O}(GL_q(2))$. Pour $E \in GL_n(\mathbb{C})$, l'algèbre de Hopf $\mathcal{G}(E, \overline{E})$ est compacte et sera notée $A_{\tilde{o}}(E)$. On se placera systématiquement dans le cas particulier où les matrices satisfont la condition $B^tA^tBA = \lambda I_n$ pour $\lambda \in k^*$. Nous classifions ces algèbres de Hopf à équivalence monoïdale près et, en caractéristique nulle, à isomorphisme près. On montre que les $GL(2)$-déformations sont exactement les algèbres de Hopf $\mathcal{G}(A,B)$ qui sont cosemisimples, et les $U(2)$-déformations sont exactement les $A_{\tilde{o}}(E)$.

Nous établissons les théorèmes suivants, qu'on regroupe ici selon le mode de classification plutôt que dans l'ordre de leurs démonstrations. On obtient une description de la catégorie de comodules de $\mathcal{G}(A,B)$ au moyen de celle des déformations standards de $GL(2)$ et on donne un critère d'équivalence monoïdale.

Théorème A.

1. *Soient $A, B \in GL_n(k)$ $(n \geq 2)$ telles que $B^tA^tBA = \lambda I_n$ pour $\lambda \in k^*$ et soit $q \in k^*$ tel que $q^2 - \sqrt{\lambda^{-1}}\,\mathrm{tr}(AB^t)q + 1 = 0$. Alors il existe une équivalence de catégories monoïdales k-linéaires*

$$\mathrm{Comod}(\mathcal{G}(A,B)) \simeq^{\otimes} \mathrm{Comod}(\mathcal{O}(GL_q(2)))$$

entre les catégories de comodules de $\mathcal{G}(A,B)$ et $\mathcal{O}(GL_q(2))$ respectivement.

2. *Soient $A, B \in GL_n(k)$, $C, D \in GL_m(k)$ telles que $B^tA^tBA = \lambda_{A,B}I_n$ et $D^tC^tDC = \lambda_{C,D}I_m$. Posons $\mu_{A,B} := \mathrm{tr}(AB^t)$ et $\mu_{C,D} := \mathrm{tr}(CD^t)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

   a) *Il existe une équivalence monoïdale*

$$\mathrm{Comod}(\mathcal{G}(A,B)) \simeq^{\otimes} \mathrm{Comod}(\mathcal{G}(C,D))$$

   entre les catégories de comodules de $\mathcal{G}(A,B)$ et $\mathcal{G}(C,D)$ respectivement.

   b) *On a*

$$\lambda_{A,B}^{-1}\mu_{A,B}^2 = \lambda_{C,D}^{-1}\mu_{C,D}^2.$$

Ensuite, en caractéristique nulle, on obtient une classification à isomorphisme près des $GL(2)$-déformations et des $U(2)$-déformations (c'est-à-dire les algèbres de Hopf compactes dont le semi-anneau de représentations est isomorphe à celui de $U_2(\mathbb{C})$), qui sont complétées par la classification à isomorphisme près des algèbres de Hopf $\mathcal{G}(A,B)$.

Théorème B. *On suppose que $char(k) = 0$.*

1. *Les algèbres de Hopf cosemisimples ayant un semi-anneau de représentations isomorphe à celui de $GL_2(k)$ sont exactement les*

$$\mathcal{G}(A,B)$$

où $A, B \in GL_n(k)$ $(n \geq 2)$ satisfont $B^tA^tBA = \lambda I_n$ pour un $\lambda \in k^*$ et telles que les solutions de l'équation $X^2 - \sqrt{\lambda^{-1}}\,\mathrm{tr}(AB^t)X + 1 = 0$ sont génériques.

2. *Les algèbres de Hopf compactes dont le semi-anneau de représentations est isomorphe à celui de $U_2(\mathbb{C})$ sont exactement les*

$$A_{\tilde{o}}(E)$$

où $E \in GL_n(\mathbb{C})$ $(n \geq 2)$ vérifie $\overline{E}^tE^t\overline{E}E = \lambda I_n$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

3. *Soient $A, B \in GL_n(k)$ et $C, D \in GL_m(k)$ telles que $B^tA^tBA = \lambda_1 I_n$ et $D^tC^tDC = \lambda_2 I_m$ pour $\lambda_1, \lambda_2 \in k^*$. Les algèbres de Hopf $\mathcal{G}(A, B)$ et $\mathcal{G}(C, D)$ sont isomorphes si et seulement si $n = m$ et il existe $P \in GL_n(k)$ tel que l'une des égalités suivantes soit vérifiée*

$$(C, D) = (P^tAP, P^{-1}BP^{-1t}) \qquad (C, D) = (P^tB^{-1}P, P^{-1}A^{-1}P^{-1t}).$$

Enfin, en utilisant l'interprétation des objets galoisiens comme foncteurs fibres, nous donnons la classification des objets galoisiens des algèbres de Hopf $\mathcal{G}(A, B)$. Soient $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq 2$ et soient $A, B \in GL_n(k)$, $C, D \in GL_m(k)$. On définit l'algèbre

$$\mathcal{G}(A, B|C, D) := k\left\langle d, d^{-1}, x_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \,\middle|\, \begin{array}{l} x^tAx = Cd, \\ xDx^t = Bd, \end{array} d^{-1}d = 1 = dd^{-1} \right\rangle$$

qui est un objet $\mathcal{G}(A, B)$-galoisien à gauche. Nous montrons que tout objet $\mathcal{G}(A, B)$-galoisien à gauche est de cette forme, et nous complétons cette classification en donnant celle à isomorphisme près des algèbres $\mathcal{G}(A, B|C, D)$ comme objets galoisiens.

Théorème C.

1. *Soient $A, B \in GL_n(k)$ $(n \geq 2)$ telles que $B^tA^tBA = \lambda I_n$ pour $\lambda \in k^*$, et soit Z un objet $\mathcal{G}(A, B)$-galoisien à gauche. Alors il existe $m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$, et des matrices $C, D \in GL_m(k)$ satisfaisant $D^tC^tDC = \lambda I_m$ et $\mathrm{tr}(AB^t) = \mathrm{tr}(CD^t)$ telles que $Z \simeq \mathcal{G}(A, B|C, D)$ comme objets galoisiens.*
2. *Soient $A, B \in GL_n(k)$ telles que $B^tA^tBA = \lambda I_n$ et soient $C_1, D_1 \in GL_{m_1}(k)$, $C_2, D_2 \in GL_{m_2}(k)$ telles que les algèbres $\mathcal{G}(A, B|C_1, D_1)$ et $\mathcal{G}(A, B|C_2, D_2)$ soient des objets $\mathcal{G}(A, B)$-galoisiens $(n, m_1$ et $m_2 \geq 2)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
   a) $\mathcal{G}(A, B|C_1, D_1)$ et $\mathcal{G}(A, B|C_2, D_2)$ sont isomorphes comme objets galoisiens.
   b) $m_1 = m_2 := m$ et il existe une matrice $M \in GL_m(k)$ telle que
   $$(C_2, D_2) = (M^{-1t}C_1M^{-1}, MD_1M^t).$$

Dans la troisième partie, nous reproduisons l'article "Quantum automorphism group and $SO(3)$-deformations", disponible sur ArXiv ([48]) et soumis pour publication à un journal à comité de lecture. Nous y considérons le cas des $SO(3)$-déformations et répondons à une question posée par Banica dans [8].

Dans [66], Wang définit le groupe quantique d'automorphismes d'une C^*-algèbre de dimension finie munie d'une fonctionnelle positive (A, φ). C'est le "plus gros" groupe quantique compact agissant sur A tel que φ est équivariante. Son algèbre de Hopf est alors noté $A_{\mathbf{aut}}(A, \varphi)$. Remarquons qu'on a $A_{\mathbf{aut}}(M_2(\mathbb{C}), \mathrm{tr}) = \mathcal{O}(SO(3))$ et qu'il existe une fonctionnelle tr_q $(q \in \mathbb{C}^*)$ telle que $A_{\mathbf{aut}}(M_2(\mathbb{C}), \mathrm{tr}_q) = \mathcal{O}(SO_q(3))$. Dans [6, 7], Banica calcule la théorie de représentations de $A_{\mathbf{aut}}(A, \varphi)$ pour certaines fonctionnelles φ (dites homogènes, voir le chapitre 9 pour la terminologie) et montre que si $\dim(A) \geq 4$, le semi-anneau de représentations de ce groupe quantique est isomorphe à celui de $SO(3)$. La question est alors de savoir si toute $SO(3)$-déformation compacte est le groupe quantique d'automorphismes d'un couple (A, φ).

Une étude minutieuse des règles de fusion de $SO(3)$, utilisant le lemme de Schur et la réciprocité de Frobenius, permet de donner une réponse positive en établissant le théorème suivant.

Théorème D. *Soit H une algèbre de Hopf compacte ayant un semi-anneau de représentations isomorphe à celui de $SO(3)$. Alors il existe une C^*-algèbre de dimension finie munie d'une fonctionnelle positive homogène (A, φ), avec $\dim A \geq 4$, telle que $H \simeq A_{\boldsymbol{aut}}(A, \varphi)$.*

Il est ensuite naturel d'étudier le cas où la fonctionnelle φ n'est plus nécessairement positive. On peut toujours définir le groupe quantique d'automorphismes d'une algèbre de dimension finie, semisimple et mesurée (A, φ), qui n'est plus nécessairement compact. Il est alors possible de décrire la catégorie de comodules de $A_{\mathbf{aut}}(A, \varphi)$ en terme de celle des q-déformations de $SO(3)$ ([58, 40, 23]). Le théorème est le suivant (le vocabulaire est défini au chapitre 9).

Théorème E. *Soit (A_E, tr_E) une algèbre de dimension finie, semisimple et mesurée, telle que $\dim A_E \geq 4$, où $E \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n} GL_{d_\lambda^E}(\mathbb{C})$ est une multimatrice normalisable. Alors il existe $q \in \mathbb{C}^*$ et une équivalence de catégorie monoïdale $\mathbb{C}$-linéaire*

$$\mathrm{Comod}(A_{\boldsymbol{aut}}(A_E, \mathrm{tr}_E)) \simeq^{\otimes} \mathrm{Comod}(\mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3)))$$

entre les catégories de comodules de $A_{\boldsymbol{aut}}(A_E, \mathrm{tr}_E)$ et $\mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3))$ respectivement. Si E est normalisée, $q \in \mathbb{C}^*$ vérifie $q^2 - \mathrm{Tr}(E^{-1})q + 1 = 0$.

Nous étudions aussi la question de classifier les algèbres de Hopf cosemisimples ayant un semi-anneau de représentations isomorphe à celui de $SO(3)$. L'étude des règles de fusion dans le cas non-compact n'est pas aussi précise que dans le cas compact, et nous ne sommes pas en mesure de conclure en général. Il n'est pas clair que toute $SO(3)$-déformation soit isomorphe au groupe quantique d'automorphismes d'une algèbre de dimension finie, semisimple et mesurée.

Dans la quatrième et dernière partie, on s'intéresse à l'algèbre de Hopf associée à une forme bilinéaire non-dégénérée. Pour $E \in GL_n(\mathbb{C})$, soit $\mathcal{B}(E)$ l'algèbre engendrée par des générateurs $x_{ij} (1 \leq i, j \leq n)$ soumis aux relations

$$E^{-1}x^tEx = I_n = xE^{-1}x^tE,$$

où x est la matrice $(x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. On utilise le lemme du diamant ([11]) pour trouver une base algébrique de $\mathcal{B}(E)$, ce qui nous permet de calculer son centre $\mathrm{Z}(\mathcal{B}(E))$. D'après les travaux de Bichon ([16]), l'algèbre de Hopf $\mathcal{B}(E)$ satisfait une dualité de Poincaré qui permet de calculer $HH_3(\mathcal{B}(E))$. Les résultats sont les suivants :

Théorème F. *Soit $E \in GL_n(\mathbb{C})$, $n \geq 3$. On a alors :*

1. $$\mathrm{Z}(\mathcal{B}(E)) = HH^0(\mathcal{B}(E)) = \mathbb{C},$$

2. $$HH_3(\mathcal{B}(E)) \simeq \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } E \text{ est symétrique ou antisymétrique,} \\ (0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La trivialité du centre de $\mathcal{B}(E)$ était déjà connue pour certaines matrices $E \in GL_n(\mathbb{C})$, d'après les résultats de Vaes et Vergnioux dans [64]. Notons que Vaes et Vergnioux obtiennent en fait un résultat *a priori* plus fort, la factorialité de l'algèbre de Von Neumann associée au groupe quantique compact de certaines formes bilinéaires non-dégénérées.

Première partie

Groupes Quantiques

Chapitre 1

Algèbres de Hopf

1.1 Préliminaires

Soit k un corps commutatif. Donnons la définition d'une algèbre de manière à pouvoir ensuite en donner une version "duale" :

Définition 1.1. Une *k-algèbre* $A = (A, m, u)$ est un triplet où A est un k-espace vectoriel et $m : A \otimes A \to A$ et $u : k \to A$ sont des applications k-linéaires telles que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m\otimes \mathrm{id}_A"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A \otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \otimes A \arrow[dd, "m"] & \\ k \otimes A \arrow[ur, "u\otimes \mathrm{id}_A"] \arrow[dr] & & A \otimes k \arrow[ul, "\mathrm{id}_A \otimes u"'] \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Un *morphisme de k-algèbres* est une application $f : A \to A'$ telle que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "m"'] & A' \otimes A' \arrow[d, "m'"] \\ A \arrow[r, "f"'] & A' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "u'"] & & A \arrow[dl, "f"] \\ & A' & \end{tikzcd}$$

On obtient ainsi la catégorie des k-algèbres, notée Alg_k.

Exemple 1.2.

1. *L'algèbre des fonctions sur un monoïde* : Soit M un monoïde, on note $k(M)$ le k-espace vectoriel des fonctions à support fini de M dans k. Il admet pour base la famille $(e_x)_{x\in M}$ où e_x est la fonction caractéristique de $x \in M$. On munit $k(M)$ d'une structure de k-algèbre grâce à $m : k(M) \otimes k(M) \to k(M)$, l'application linéaire telle que $m(e_x \otimes e_y) = \delta_{x,y} e_x, \ \forall\ x, y \in X$.
2. *L'algèbre d'un monoïde* : Soit M un monoïde. On définit le produit de convolution sur $k(M)$ par :

$$\begin{aligned} k(M) \times k(M) &\to k(M) \\ (f, g) &\mapsto f * g,\ f * g(x) = \sum_{yz=x} f(y)g(z). \end{aligned}$$

En particulier, on a $e_x * e_y = e_{xy}$. Le produit de convolution munit $k(M)$ d'une structure de k-algèbre, alors notée $k[M]$ et appelée la k-algèbre du monoïde M.

3. Soit $A = (A, m, u)$ une algèbre. Posons $A^{op} = (A, m^{op}, u)$ où $m^{op} = m \circ \tau$, et $\tau : A \otimes A \to A \otimes A$ désigne le flip $\tau(a \otimes a') = a' \otimes a$. Alors A^{op} est une algèbre, appelée algèbre opposée de A.

Définition 1.3. On dit qu'une algèbre (A, m, u) est *commutative* si $m = m^{op}$.

Nous définissons la notion de cogèbre comme la notion "duale" de celle d'algèbre :

Définition 1.4. Une *k-cogèbre* $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ est un triplet où C est un k-espace vectoriel et $\Delta : C \to C \otimes C$ et $\varepsilon : C \to k$ sont des applications k-linéaires telles que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes \mathrm{id}_C"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\mathrm{id}_C \otimes \Delta"'] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "1 \otimes \mathrm{id}_C"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_C \otimes 1"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\
k \otimes C & & C \otimes k \\
 & C \otimes C \arrow[ul, "\varepsilon \otimes \mathrm{id}_C"] \arrow[ur, "\mathrm{id}_C \otimes \varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

Un *morphisme de k-cogèbres* $f : (C, \Delta, \varepsilon) \to (C', \Delta', \varepsilon')$ est une application linéaire $f : C \to C'$ telle que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta"'] & C' \arrow[d, "\Delta'"] \\
C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"'] & C' \otimes C'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon"] & & C' \arrow[dl, "\varepsilon'"] \\
 & k &
\end{tikzcd}$$

On obtient ainsi la catégorie des k-cogèbres, notée Cog_k.

On utilisera les notations suivantes, dites notations de Sweedler :

Notation 1.5. Soit $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ une cogèbre.

Pour $x \in C$ on notera

$$\Delta(x) = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)}.$$

L'axiome de coassociativité se traduit par

$$\sum \Delta(x_{(1)}) \otimes x_{(2)} = \sum x_{(1)} \otimes \Delta(x_{(2)}) = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes x_{(3)},$$

l'axiome de co-unité se traduit par

$$\sum \varepsilon(x_{(1)}) x_{(2)} = x = \sum x_{(1)} \varepsilon(x_{(2)}).$$

Enfin, $f : C \to C'$ est un morphisme de cogèbres si et seulement si

$$\forall x, \in C \qquad \sum f(x)_{(1)} \otimes f(x)_{(2)} = \sum f(x_{(1)}) \otimes f(x_{(2)}), \qquad \text{et } \varepsilon'(f(x)) = \varepsilon(x).$$

Exemple 1.6.

1. Le dual d'une cogèbre $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ est une algèbre, avec unité $u = \varepsilon^*$ et produit défini par la composée

$$\Delta : C^* \otimes C^* \longrightarrow (C \otimes C)^* \xrightarrow{\Delta^*} C^*.$$

2. Le dual d'une k-algèbre de dimension finie $A = (A, m, u)$ est une cogèbre, avec comultiplication définie par

$$\Delta : A^* \xrightarrow{m*} (A \otimes A)^* \xrightarrow{\sim} A^* \otimes A^*$$

et co-unité u^*

3. Soit $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ une cogèbre. Soit $\Delta^{op} = \tau \circ \Delta$. Alors $(C, \Delta^{op}, \varepsilon)$ est une cogèbre, appelée la cogèbre opposée de C et notée C^{cop}.

Définition 1.7. On dit qu'une cogèbre (C, Δ, ε) est *cocommutative* lorsque $\Delta = \Delta^{op}$.

La notion de bigèbre est définie de manière naturelle en combinant celle d'algèbre et de cogèbre :

Définition 1.8. Une k-*bigèbre* est un quintuplet $B = (B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ où (B, m, u) est une algèbre, (B, Δ, ε) une cogèbre et où $\Delta : B \to B \otimes B$ et $\varepsilon : B \to k$ sont des morphismes d'algèbres.

Un *morphisme de bigèbres* $f : B \to B'$ est une application linéaire qui est à la fois un morphisme d'algèbres et de cogèbres.

On obtient ainsi la catégorie des k-bigèbres, notée Big_k.

Exemple 1.9.

1. *Bigèbre d'un monoïde* : Soit M un monoïde. $k[M]$ admet une unique structure de bigèbre telle que
$$\forall\, x \in M,\ \Delta(e_x) = e_x \otimes e_x,\ \varepsilon(e_x) = 1.$$
On dit que $k[M]$ est la bigèbre du monoïde M. C'est une bigèbre cocommutative.

2. *Bigèbre des fonctions sur un monoïde fini* : Soit M un monoïde fini. On munit $k(M)$ d'une structure de bigèbre grâce aux morphismes d'algèbres (induits par le produit sur M et son unité) :

$$\Delta : k(M) \to k(M) \otimes k(M),\ \Delta(e_x) = \sum_{yz=x} e_y \otimes e_z,$$

$$\varepsilon : k(M) \to k,\ f \mapsto f(1).$$

C'est une bigèbre commutative. On a l'isomorphisme $k(M) \simeq k[M]^*$, qui envoie e_x sur e_x^*.

3. *Bigèbre de matrices* : Notons $\mathcal{O}(M_n(k))$ l'algèbre de polynômes $k[x_{ij}]_{1 \le i,j \le n}$. Les morphismes d'algèbres

$$\Delta : \mathcal{O}(M_n(k)) \to \mathcal{O}(M_n(k)) \otimes \mathcal{O}(M_n(k))$$
$$x_{ij} \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \otimes x_{kj}$$

et

$$\begin{aligned} \varepsilon : \mathcal{O}(M_n(k)) &\to k \\ x_{ij} &\mapsto \delta_{ij} \end{aligned}$$

munissent $\mathcal{O}(M_n(k))$ d'une structure de bigèbre commutative, mais non cocommutative si $n \geq 2$.

Définition 1.10. Une *algèbre de Hopf* est un sextuplet $H = (H, m, u, \Delta, \varepsilon, S)$ où $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ est une bigèbre et $S : H \to H$ est une application linéaire, appelée l'antipode de H, telle que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dd, "\varepsilon"'] & H \otimes H \arrow[dr, "S\otimes \mathrm{id}_H"] & \\
& & H \otimes H \arrow[dl, "m"] \\
k \arrow[r, "u"'] & H &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dd, "\varepsilon"'] & H \otimes H \arrow[dr, "\mathrm{id}_H \otimes S"] & \\
& & H \otimes H \arrow[dl, "m"] \\
k \arrow[r, "u"'] & H &
\end{tikzcd}$$

Un *morphisme d'algèbres de Hopf* $f : H \to H'$ est un morphisme entre les bigèbres sous-jacentes.

On obtient ainsi la catégorie des k-algèbres de Hopf, notée Hopf_k, et les sous-catégories des k-algèbres de Hopf de dimension finie, notée $\mathrm{Hopf}_{k,f}$, des k-algèbres de Hopf commutatives, notée Com-Hopf_k et des k-algèbres de Hopf cocommutatives, notée Cocom-Hopf_k.

L'antipode est en fait l'analogue de l'inverse pour les groupes.

Exemple 1.11.

1. *Algèbres de Hopf associées à un groupe* : Soit G un groupe. Alors la bigèbre $k[G]$ possède un antipode défini par

$$S(e_x) = e_{x^{-1}}, \forall\, x \in G$$

et est donc une algèbre de Hopf. Si le groupe G est fini, alors la bigèbre $k(G)$ possède un antipode défini par

$$S(e_x) = e_{x^{-1}}, \forall\, x \in G$$

et est donc une algèbre de Hopf. Si G est un groupe algébrique affine, on note $\mathcal{O}(G)$ son algèbre de fonctions régulières. Alors la multiplication $m : G \times G \to G$ induit un morphisme d'algèbres

$$\Delta : \mathcal{O}(G) \xrightarrow{m^*} \mathcal{O}(G \times G) \xrightarrow{\backsim} \mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G).$$

L'élément unité induit un morphisme $\varepsilon : \mathcal{O}(G) \to k$, $f \mapsto f(1)$ et l'inversion $G \to G$ induit un morphisme d'algèbres $S : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)^{op}$. Les axiomes de groupe assurent alors que $\mathcal{O}(G)$ est une algèbre de Hopf.

2. *Le groupe quantique d'une forme bilinéaire non-dégénérée* : Cette algèbre de Hopf a été introduite par Dubois-Violette et Launer dans [27]. Soit $E \in GL_n(k)$. On pose

$$\mathcal{B}(E) = k < x_{ij}, 1 \leq i, j \leq n \mid E^{-1}x^tEx = I_n = xE^{-1}x^tE >$$

où $x = (x_{ij})$. On peut munir $\mathcal{B}(E)$ de la structure d'algèbre de Hopf suivante :

$$\Delta : \mathcal{B}(E) \to \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E),\ \Delta(x_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \otimes x_{kj},$$

$$\varepsilon : \mathcal{B}(E) \to k,\ \varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij},$$

et

$$S : \mathcal{B}(E) \to \mathcal{B}(E)^{op},\ S(x) = E^{-1} x^t E.$$

3. Soit H une algèbre de Hopf de dimension finie. Alors $S^* : H^* \to H^*$ est un antipode sur H^*, qui est donc une algèbre de Hopf. On a un isomorphisme d'algèbres de Hopf $H \cong H^{**}$.
4. Soit $H = (H, m, u, \Delta, \varepsilon, S)$ une algèbre de Hopf. Alors $H^{opcop} = (H, m^{op}, u, \Delta^{cop}, \varepsilon, S)$ est une algèbre de Hopf et $S : H \to H^{opcop}$ est un morphisme d'algèbres de Hopf. Si de plus S est un isomorphisme, $H^{op} = (H, m^{op}, u, \Delta, \varepsilon, S^{-1})$ et $H^{cop} = (H, m, u, \Delta^{cop}, \varepsilon, S^{-1})$ sont des algèbres de Hopf.

1.2 Groupes quantiques

Soit G un groupe algébrique affine (sur un corps de caractéristique nulle) et soit $\mathcal{O}(G)$ l'algèbre des fonctions régulières sur G. Cette algèbre est commutative, réduite et de type fini et on a vu plus haut que la structure de groupe de G induit une structure d'algèbre de Hopf sur $\mathcal{O}(G)$. On a ainsi un foncteur contravariant

$$\mathcal{O}(-) : \mathrm{Gp}_{\mathrm{alg}} \to \text{Com-Hopf}_{\mathrm{r,tf}}$$

où $\mathrm{Gp}_{\mathrm{alg}}$ désigne la catégorie des groupes algébriques affines et $\text{Com-Hopf}_{\mathrm{r,tf}}$ celle des algèbres de Hopf commutatives, réduites et de type fini. Maintenant, un théorème de Cartier (voir [46, 67]) assure que, lorsque k est algébriquement clos, toute algèbre de Hopf est réduite et permet de dire que le foncteur $\mathcal{O}(-)$ est une anti-équivalence de catégories entre les catégories $\mathrm{Gp}_{\mathrm{alg}}$ et $\text{Com-Hopf}_{\mathrm{r,tf}}$.

Par analogie avec cette situation, on définit la catégorie des groupes quantiques algébriques comme la catégorie opposée à celle des algèbres de Hopf de type fini non-nécessairement commutatives. Autrement dit, étant donnée une algèbre de Hopf de type fini H, on considère que H est l'algèbre des fonctions régulières d'un groupe quantique algébrique, c'est-à-dire, heuristiquement

$$H = \mathcal{O}(G).$$

Il faut insister sur le fait que G est un groupe classique si et seulement si H est commutative. En général, un groupe quantique est un objet virtuel qu'on ne voit qu'à travers l'algèbre de Hopf. L'objectif est alors d'utiliser ce point de vue pour traduire en terme d'algèbres des problématiques de théorie des groupes. Nous verrons dans le chapitre suivant comment adapter la théorie de représentations de groupes aux groupes quantiques.

Nous détaillons ici le cas des groupes quantiques *algébriques* puisque ce sont eux qui nous occuperont principalement dans la suite de ce manuscrit. Il est cependant possible, en choisissant soigneusement la catégorie d'algèbres (algèbres de dimension finie, algèbres de Woronowicz...), de considérer des groupes quantiques d'un autre type (finis, compacts, localement compacts, discrets...). La situation peut alors être plus délicate, et nous n'entrerons pas dans plus de détails ici. Voir [72, 68, 42, 43, 29]. Nous évoquerons cependant le cas des groupes quantiques compacts à un niveau purement algébrique.

Chapitre 2

Représentations des groupes quantiques

2.1 Catégories Monoïdales ([38], [44])

Définition 2.1. Une *catégorie monoïdale* $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ est une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'un produit tensoriel $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, d'un objet $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ appelé unité du produit tensoriel, d'une contrainte d'associativité $a : -\otimes(-\otimes-) \to -\otimes(-\otimes-)$, d'une contrainte d'unité à gauche $l : -\otimes I \to -$ et d'une contrainte d'unité à droite $r : -\otimes I \to -$ respectant I et telles que les diagrammes suivants soient commutatifs pour tous objets U, V, W, X de $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
(U \otimes (V \otimes W)) \otimes X \arrow[dd, "a_{U,V\otimes W,X}"'] & ((U \otimes V) \otimes W) \otimes X \arrow[l, "a_{U,V,W}\otimes \mathrm{id}_X"'] \arrow[d, "a_{U\otimes V,W,X}"] \\
& (U \otimes V) \otimes (W \otimes X) \arrow[d, "a_{U,V,W\otimes X}"] \\
U \otimes ((V \otimes W) \otimes X) \arrow[r, "\mathrm{id}_U \otimes a_{V,W,X}"'] & U \otimes (V \otimes (W \otimes X))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(V \otimes I) \otimes W \arrow[rr, "a_{V,I,W}"] \arrow[dr, "r_V \otimes \mathrm{id}_W"'] & & V \otimes (I \otimes W) \arrow[dl, "\mathrm{id}_V \otimes l_W"] \\
& V \otimes W &
\end{tikzcd}$$

La catégorie des espaces vectoriels munie du produit tensoriel usuel forme une catégorie monoïdale. Nous verrons au paragraphe suivant que la catégorie des représentations d'un groupe quantique est une catégorie monoïdale.

Définition 2.2. Soient $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, I_{\mathcal{C}}, a, l, r)$ et $\mathcal{D} = (\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, I_{\mathcal{D}}, a, l, r)$ des catégories monoïdales.

1. Un *foncteur monoïdal* entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ est un triplet $(F, \varphi_0, \varphi_2)$ où $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur et

$$\varphi_0 : I_{\mathcal{D}} \to F(I_{\mathcal{C}}), \qquad \varphi_2 : F(-) \otimes_{\mathcal{D}} F(-) \to F(- \otimes_{\mathcal{C}} -)$$

sont des isomorphismes fonctoriels tels que, pour tous objets $U, V, W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
(F(U)\otimes F(V))\otimes F(W) \arrow[r, "a_{F(U),F(V),F(W)}"] \arrow[d, "\varphi_2(U,V)\otimes \mathrm{id}_{F(W)}"'] & F(U)\otimes (F(V)\otimes F(W)) \arrow[d, "\mathrm{id}_{F(U)}\otimes \varphi_2(V,W)"] \\
F(U\otimes V)\otimes F(W) \arrow[d, "\varphi(U\otimes V,W)"'] & F(U)\otimes F(V\otimes W) \arrow[d, "\varphi_2(U,V\otimes W)"] \\
F((U\otimes V)\otimes W) \arrow[r, "F(a_{U,V,W})"'] & F(U\otimes (V\otimes W)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I_{\mathcal{D}}\otimes F(U) \arrow[r, "l_{F(U)}"] \arrow[d, "\varphi_0\otimes \mathrm{id}_{F(U)}"'] & F(U) \\
F(I_{\mathcal{C}})\otimes F(U) \arrow[r, "\varphi_2(I_{\mathcal{C}},U)"'] & F(I_{\mathcal{C}}\otimes U) \arrow[u, "F(l_U)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(U)\otimes I_{\mathcal{D}} \arrow[r, "r_{F(U)}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{F(U)}\otimes\varphi_0"'] & F(U) \\
F(U)\otimes F(I_{\mathcal{C}}) \arrow[r, "\varphi_2(U,I_{\mathcal{C}})"'] & F(U\otimes I_{\mathcal{C}}) \arrow[u, "F(r_U)"']
\end{tikzcd}$$

2. Une équivalence de catégories monoïdales est un foncteur monoïdal qui est aussi une équivalence de catégories.

Définition 2.3.

1. Soit $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, I_{\mathcal{C}}, a, l, r)$ une catégorie monoïdale. Un *dual à gauche* pour $U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ est un objet $U^* \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ muni de 2 morphismes $e_U : U^* \otimes U \to I$ et $\delta_U : I \to U \otimes U^*$ tels que

$$(\mathrm{id}_U \otimes e_U)(\delta_U \otimes \mathrm{id}_U) = \mathrm{id}_U \qquad (e_U \otimes \mathrm{id}_{U^*})(\mathrm{id}_{U^*} \otimes \delta_U) = \mathrm{id}_{U^*}\,.$$

   On définit de même un *dual à droite* ${}^*U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, avec des applications $e'_U : U \otimes {}^*U \to I$ et $\delta'_U : I \to^* U \otimes U$.

2. Une catégorie monoïdale est dite *rigide* si chaque objet possède un dual à gauche et à droite.

Remarque 2.4. Un dual (à gauche ou à droite), s'il existe, est unique.

2.2 Comodules sur une algèbre de Hopf ([38], [40])

Notre but est maintenant d'étudier les groupes quantiques de la même manière que nous le ferions pour les groupes classiques. En particulier, nous souhaitons étudier leurs représentations. Comme un groupe quantique est toujours vu au travers de son algèbre de Hopf de fonctions, nous allons "dualiser" la notion de représentations : on obtient la notion de comodules.

Définition 2.5. Soit $H = (H, m, u, \Delta, \varepsilon, s)$ une algèbre de Hopf. Un H-*comodule* (à droite de dimension finie) est une paire (V, α_V) où V est un k-espace vectoriel de dimension finie et $\alpha_V : V \to V \otimes H$ une application linéaire, appelée la coaction de H sur V, telle que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\alpha_V"] \arrow[d, "\alpha_V"'] & V\otimes H \arrow[d, "\alpha_V\otimes \mathrm{id}_H"] \\
V\otimes H \arrow[r, "\mathrm{id}_V\otimes\Delta"'] & V\otimes H\otimes H
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "\alpha_V"] \arrow[dr, "\simeq"] & & V\otimes H \arrow[dl, "\mathrm{id}_V\otimes\varepsilon"] \\
& V\otimes k &
\end{tikzcd}$$

Un *morphisme de comodules* (ou application H-colinéaire) $f : (V, \alpha_V) \to (W, \alpha_W)$ est une application linéaire $f : V \to W$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_V"'] & W \arrow[d, "\alpha_W"] \\ V \otimes H \arrow[r, "f\otimes \mathrm{id}_H"'] & W \otimes H \end{tikzcd}$$

On obtient ainsi la catégorie des H-comodules à droite, notée $\mathrm{Comod}(H)$, et on note $\mathrm{Comod}_f(H)$ la sous-catégorie pleine des H-comodules de dimension finie.
On définit de même la catégorie des H-comodules à gauche, notée $\mathrm{Comod}^l(H)$. Sauf mention explicite du contraire, un comodule désignera un comodule à droite de dimension finie.

Exemple 2.6. Soient H une algèbre de Hopf, (V, α_V) un H-comodule et soit $f \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Hopf}}(H)$. On note (V^f, α_{V^f}) le H-comodule dont la coaction est donnée par $\alpha_{V^f} = (\mathrm{id}_V \otimes f) \circ \alpha_V$.

Définition 2.7. Soient H une algèbre de Hopf et V un H-comodule. Un *sous-comodule* de V est un sous-espace vectoriel $W \subset V$ tel que $\alpha_V(W) \subset W \otimes H$.

On donne les notations de Sweedler pour les comodules :

Notation 2.8. Soit (V, α_V) un H-comodule. Pour $v \in V$ on notera

$$\alpha_V(v) = \sum v_{(0)} \otimes v_{(1)}.$$

Les axiomes se traduisent par

$$(\mathrm{id}_V \otimes \Delta) \circ \alpha_V(v) = (\alpha_V \otimes \mathrm{id}_H) \circ \alpha_V(v) = \sum v_{(0)} \otimes v_{(1)} \otimes v_{(2)}$$

et

$$\sum \varepsilon(v_{(1)}) v_{(0)} = v.$$

Les représentations d'un groupe algébrique G s'identifient aux $\mathcal{O}(G)$-comodules de dimension finie.

Proposition 2.9. *Soit G un groupe algébrique affine. Soit V un $\mathcal{O}(G)$-comodule de dimension finie. Pour $g \in G$, l'application linéaire $\pi_V(g) : V \to V, v \mapsto \sum v_{(1)}(g) v_{(0)}$ est bijective, et on obtient ainsi une représentation linéaire de G :*

$$\pi_V : G \to \mathrm{GL}(V).$$

Si $\mathrm{Rep}(G)$ est la catégorie des représentations de dimension finie de G, cette construction définit un foncteur

$$\mathrm{Comod}_f(\mathcal{O}(G)) \to \mathrm{Rep}(G)$$

qui est une équivalence de catégories.

Donnons une méthode utile pour construire des comodules.

Définition 2.10. Une matrice $x = (x_{ij}) \in M_n(H)$ est dite *multiplicative* si elle vérifie

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \qquad \Delta(x_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \otimes x_{kj}, \qquad \varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}.$$

Proposition 2.11. *Soit (V, α_V) un H-comodule de dimension finie, $v_1, ..., v_n$ une base de V. Alors il existe une matrice multiplicative $x = (x_{ij}) \in M_n(H)$ telle que*

$$\forall 1 \leq i \leq n,\ \alpha_V(v_i) = \sum_{j=1}^{n} v_j \otimes x_{ji}.$$

Réciproquement, pour toute matrice multiplicative de H et toute base de V, la formule précédente définit une structure de H-comodule.

Remarquons que dans la définition, seule la structure de cogèbre de l'algèbre de Hopf est utilisée, de sorte qu'on peut définir la catégorie des comodules d'une cogèbre (C, Δ, ε). Les structures supplémentaires d'une algèbre de Hopf se traduisent sur la structure de sa catégorie des comodules, comme le montrent les constructions suivantes. Tout d'abord, la structure de bigèbre permet de munir $\mathrm{Comod}(H)$ d'un produit tensoriel.

Proposition 2.12. *Soit H une algèbre de Hopf et soient $V = (V, \alpha_V)$ et $W = (W, \alpha_W)$ des H-comodules. L'application linéaire*

$$\alpha_{V\otimes W} := (\mathrm{id}_V \otimes \mathrm{id}_W \otimes m) \circ (\mathrm{id}_V \otimes \tau \otimes \mathrm{id}_H) \circ (\alpha_V \otimes \alpha_W) : V \otimes W \to V \otimes W \otimes H$$

munit $V \otimes W$ d'une structure de H-comodule. Le comodule $(V \otimes W, \alpha_{V\otimes W})$ est appelé le produit tensoriel des comodules V et W. De plus, si V, V', W, W' sont des H-comodules et si $f : V \to V'$ et $g : W \to W'$ sont des applications H-colinéaires, alors $f \otimes g : V \otimes W \to V' \otimes W'$ est H-colinéaire.

Enfin, l'antipode permet de construire une dualité dans $\mathrm{Comod}_f(H)$, de sorte que $\mathrm{Comod}_f(H)$ est une catégorie rigide (à gauche).

Proposition 2.13. *Soient H une algèbre de Hopf d'antipode S et (V, α_V) un H-comodule de dimension finie, de base $v_1, ..., v_n$, et soit $x = (x_{ij}) \in M_n(H)$ la matrice multiplicative associée. L'application $\alpha_{V^*} : V^* \to V^* \otimes H$ définie par $\alpha_{V^*}(v_i^*) = \sum_{i=1}^{n} v_j^* \otimes S(x_{ij})$ est une coaction sur V^* telle que les applications*

$$ev : V^* \otimes V \to k,\ f \otimes x \mapsto f(x)$$

et

$$\delta_V : k \to V \otimes V^*,\ \text{définie par } \delta_V(1) = \sum_i v_i \otimes v_i^*$$

sont H-colinéaires et vérifient

$$(ev \otimes \mathrm{id}_{V^*}) \circ (\mathrm{id}_{V^*} \otimes \delta_V) = \mathrm{id}_{V^*}, \qquad (\mathrm{id}_V \otimes ev) \circ (\delta_V \otimes \mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_V.$$

Pour étudier un comodule, il est souvent utile de lui associer une cogèbre, de la manière suivante :

Définition 2.14. Soient H une algèbre de Hopf et (V, α_V) un H-comodule. Alors

$$C(V) := \{(\phi \otimes \mathrm{id}_H)(\alpha_V(v));\ \phi \in V^*,\ v \in V\} \subset H$$

est une sous-cogèbre de H, la cogèbre des coefficients matriciels de V.

Exemple 2.15. Soient H une algèbre de Hopf et V un H-comodule. Si $x = (x_{ij}) \in M_n(H)$ est la matrice multiplicative associée au choix d'une base de V, alors $C(V) = \mathrm{Vect}(x_{ij}, 1 \leq i, j \leq n)$.

2.3 Comodules semisimples ([40])

De la même manière que l'on considère la notion de simplicité pour les représentations de groupes ou les modules d'algèbres, on définit la notion analogue pour les comodules de cogèbres :

Définition 2.16. Un H-comodule V est dit *simple* s'il est non nul et si les seuls sous-comodules de V sont (0) et V. Il est dit *semisimple* s'il est somme directe de sous-comodules simples.

Définition 2.17. Une algèbre de Hopf H est dite *cosemisimple* si tout H-comodule est semisimple.
Un groupe algébrique affine G est dit *linéairement réductif* si $\mathcal{O}(G)$ est cosemisimple.

Voici le lemme de Schur pour les comodules :

Proposition 2.18. *Soient V et W des comodules simples.*

1. *Si V et W ne sont pas isomorphes, alors* $\mathrm{Hom}_H(V, W) = (0)$.
2. $\mathrm{End}_H(V)$ *est un corps.*
3. *Si k est algébriquement clos, alors* $\mathrm{End}_H(V) = k$.

On donne un résultat d'unicité de la décomposition d'un comodule semisimple en comodules simples :

Proposition 2.19. *Soit H une algèbre de Hopf et soient V un H-comodule simple et W un H-comodule. Si W est semisimple avec $W = \oplus_{i \in I} V_i$, les V_i, $i \in I$ étant simples, alors V est isomorphe à un sous-comodule de W si et seulement s'il existe $i \in I$ tel que V soit isomorphe à V_i.*

L'étude de la cogèbre des coefficients matriciels renseigne sur la simplicité de son comodule :

Proposition 2.20. *Soient H une algèbre de Hopf et V un H-comodule. Alors V est simple si et seulement si $C(V)$ n'a pas de sous-cogèbre propre. Réciproquement, toute sous-cogèbre $H' \subset H$ sans sous-cogèbre propre est de la forme $C(V)$ pour un H-comodule simple V.*

Proposition 2.21. *Soit H une algèbre de Hopf et soit V un H-comodule de dimension finie avec $x = (x_{ij}) \in M_n(H)$ la matrice multiplicative associée au choix d'une base de V. Alors V est simple si et seulement si les éléments $x_{ij} \in H$, $1 \leq i, j \leq n$ sont linéairement indépendants.*

Proposition 2.22. *Soient H une algèbre de Hopf et V, W des H-comodules simples. On a l'alternative suivante :*

1. *ou bien $C(V) = C(W)$ et $V \cong W$ comme H-comodules,*
2. *ou bien $C(V) \cap C(W) = (0)$ et V et W ne sont pas isomorphes.*

Proposition 2.23. *Soit H une algèbre de Hopf cosemisimple. Notons $\widehat{H}$ l'ensemble des classes d'isomorphismes des comodules simples de H. Pour chaque $\lambda \in \widehat{H}$, fixons un comodule V_λ appartenant à la classe λ. On a alors la décomposition suivante, dite décomposition de Peter-Weyl :*

$$H = \bigoplus_{\lambda \in \widehat{H}} C(V_\lambda).$$

2.4 Algèbres de Hopf compactes

Donnons la définition d'une algèbre de Hopf compacte (voir [40]) :

Définition 2.24.

1. Une $*$-*algèbre de Hopf* est une algèbre de Hopf H qui est aussi une $*$-algèbre et telle que la comultiplication soit un $*$-homomorphisme.
2. Si $x = (x_{ij}) \in M_n(H)$ est une matrice à coefficients dans H, la matrice (x_{ij}^*) est notée $\overline{x}$ tandis que la matrice $\overline{x}^t$, la transposée de la matrice $\overline{x}$, sera notée x^*. La matrice x est dite unitaire si $x^*x = I_n = xx^*$.
3. Une $*$-algèbre de Hopf est dite *algèbre de Hopf compacte* si pour chaque H-comodule de dimension finie, de matrice multiplicative des coefficients associée $x \in M_n(H)$, il existe $K \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice KxK^{-1} est unitaire.

Les algèbres de Hopf compactes correspondent aux algèbres de Hopf de fonctions représentatives sur des groupes quantiques compacts. Dans la suite, on ne considérera les groupes quantiques compacts qu'au niveau des algèbres de Hopf compactes.

2.5 Semi-anneaux de représentations

Soit H une algèbre de Hopf cosemisimple. Si $V \in \mathrm{Comod}(H)$, on note $[V]$ sa classe d'isomorphisme. Soit $\mathcal{R}(H)$ le groupe abélien libre engendré par les classe d'isomorphismes des H-comodules simples. La structure monoïdale de $\mathrm{Comod}(H)$ induit une structure d'anneau sur $\mathcal{R}(H)$. Le *semi-anneau de représentations* de H est défini par :

$$\mathcal{R}^+(H) := \{\sum_i a_i[V_i], a_i \geq 0, V_i \in \mathrm{Comod}(H)\}.$$

Soit L une autre algèbre de Hopf, $f : H \to L$ un morphisme d'algèbres de Hopf. Alors f induit un foncteur monoïdal $f_* : \mathrm{Comod}(H) \to \mathrm{Comod}(L)$, et donc un morphisme de semi-anneau $f_* : \mathcal{R}^+(H) \to \mathcal{R}^+(L)$. De plus, on peut montrer que si $F : \mathcal{R}^+(H) \to \mathcal{R}^+(L)$ est un isomorphisme de semi-anneau, alors F induit une bijection (qui préserve le produit tensoriel) entre les classe d'isomorphismes de comodules simples de H et L.

Le lemme suivant nous servira par la suite :

Lemme 2.25. *([37]) Soient H, L des algèbres de Hopf cosemisimples, soit $f : H \to L$ un morphisme d'algèbres de Hopf tel que $f_* : \mathcal{R}^+(H) \to \mathcal{R}^+(L)$ soit un isomorphisme. Alors $f : H \to L$ est un isomorphisme d'algèbres de Hopf.*

La définition suivante constitue l'objet d'étude principal de cette thèse.

Définition 2.26. Soit G un groupe algébrique réductif. On dit qu'une algèbre de Hopf H cosemisimple est une G-*déformation* si $\mathcal{R}^+(H) \simeq \mathcal{R}^+(\mathcal{O}(G))$.

Exemple 2.27.

1. Soit $q \in \mathbb{C}^*$ générique. Alors $\mathcal{O}(SL_q(2))$ est une $SL(2)$-déformation, $\mathcal{O}(SO_q(3))$ est une $SO(3)$-déformation et $\mathcal{O}(GL_q(2))$ est une $GL(2)$-déformation.
2. Soit $E \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que les solutions de l'équation $X^2 + \mathrm{tr}(E^tE^{-1})X + 1 = 0$ soient génériques. Alors l'algèbre de Hopf $\mathcal{B}(E)$ (donnée dans l'exemple 1.11) est une $SL(2)$-déformation. Voir [13].

Chapitre 3

Équivalences monoïdales

3.1 Objets de Hopf-Galois

Dans ce manuscrit, on s'intéresse essentiellement à deux moyens de classifier les groupes quantiques, chacun lié à la théorie des représentations. Plus précisement, on va s'intéresser d'une part à classifier les groupes quantiques suivant leur semi-anneau de représentations et, d'autre part, à classifier les groupes quantiques à équivalence monoïdale près, c'est-à-dire qu'on cherche des algèbres de Hopf ayant des catégories de comodules monoïdalement équivalentes. Nous allons maintenant définir des objets très utiles pour construire des équivalences de catégories monoïdales.

Définition 3.1. Un H-comodule (à droite) (A, α_A) est appelé une *algèbre H-comodule* (à droite) si A est une k-algèbre telle que la coaction $\alpha_A : A \to A \otimes H$ est un homomorphisme d'algèbres. On définit facilement la notion d'algèbre H-comodule à gauche.

Définition 3.2. ([46]) Une algèbre H-comodule (à droite) (A, α_A) est appelée un *objet H-galoisien (à droite)* si $A \neq (0)$ et si l'application (composée)

$$\kappa_A^r : A \otimes A \xrightarrow{\mathrm{id}_A \otimes \alpha_A} A \otimes A \otimes H \xrightarrow{m_A \otimes \mathrm{id}_H} A \otimes H$$

est un isomorphisme. On définit de même la notion d'objet H-galoisien à gauche : une algèbre H-comodule (A, β_A) à gauche est un objet H-galoisien à gauche si $A \neq (0)$ et si l'application (composée)

$$\kappa_A^l : A \otimes A \xrightarrow{\beta_A \otimes \mathrm{id}_A} H \otimes A \otimes A \xrightarrow{\mathrm{id}_H \otimes m_A} H \otimes A$$

est un isomorphisme.

Les objets de Hopf Galois généralisent les extensions galoisiennes de corps, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 3.3. ([46]) Soit E/k une extension de corps de degré fini m, de groupe de Galois $Gal(E/k) = G = \{x_1, \dots, x_n\}$. Alors l'algèbre de groupe $k[G]$ agit sur E, et donc son dual $k[G]^* \simeq k(G)$ coagit : soit $\{p_1, \dots, p_n\} \subset k(G)$ la base duale de $\{e_{x_1}, \dots, e_{x_n}\} \subset k[G]$. L'action de G sur E induit une coaction

$$\alpha : E \to E \otimes k(G),\ a \mapsto \sum_{i=1}^{n} (x_i.a) \otimes p_i$$

et l'application galoisienne est donnée par

$$\kappa : E \otimes E \to E \otimes k(G),\ a \otimes b \mapsto \sum_i a(x_i.b) \otimes p_i.$$

Supposons que E/k est galoisienne : on sait que E/k est galoisienne si et seulement si $|G| = [E : k]$. Soit $\{b_1, \dots, b_m\}$ une base de E/k et soit $w = \sum_j a_j \otimes b_j \in \ker(\kappa)$. On a $\sum_j a_j(x_i.b_j) = 0$ car les p_i sont indépendants. Puisque G agit fidèlement, le lemme de Dedekind assure que la matrice $C = (x_i.b_j)_{i,j}$ est inversible. Ainsi, $a_j = 0$ pour tout j et donc $w = 0$. Ainsi κ est injective, et donc bijective car les dimensions sont finies. Finalement, E est un objet $k(G)$-galoisien.

Réciproquement, supposons que E est un objet $k(G)$-galoisien. On a $E^G = E^{\ co\ k(G)}$. Soit $x \in E^{\ co\ k(G)}$, c'est-à-dire $\alpha(x) = x \otimes 1$. Alors $\kappa(x \otimes 1) = x \otimes 1_{k(G)}$ et $\kappa(1 \otimes x) = x \otimes 1_{k(G)}$, et donc $x \otimes 1 = 1 \otimes x \in E \otimes E$ car κ est bijective. Si $x \notin k.1$, 1 et x sont indépendants, et donc il existe $\psi \in E^*$ telle que $\psi(1) = 1$ et $\psi(x) = 0$. Alors

$$(\psi \otimes \mathrm{id}_E)(1 \otimes x) = x = 0 = (\psi \otimes \mathrm{id}_E)(x \otimes 1).$$

Finalement, $E^{\ co\ k(G)} = k$, et donc l'extension de corps E/k est galoisienne.

Exemple 3.4. (H, Δ) munie d'une coaction à droite et à gauche par la comultiplication est un objet H-galoisien.

Définition 3.5. Un H-comodule à droite (V, α_V) qui est aussi un L-comodule à gauche (V, β_V) est dit un *L-H-cobimodule* si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\alpha_V"] \arrow[d, "\beta_V"'] & V \otimes H \arrow[d, "\beta_V \otimes \mathrm{id}_H"] \\ L \otimes V \arrow[r, "\mathrm{id}_L \otimes \alpha_V"'] & L \otimes V \otimes H. \end{tikzcd}$$

On note $\mathrm{BiComod}(L, H)$ la catégorie de L-H-cobimodules, les morphismes étant les applications à la fois H-colinéaires et L-colinéaires.

Définition 3.6. ([55], [56]) On dit qu'une algèbre A est un *objet L-H-bigaloisien* si :

1. A est une algèbre L-H-cobimodule,
2. A est un objet L-galoisien à gauche,
3. A est un objet H-galoisien à droite.

On dispose du résultat d'universalité suivant, voir [55] :

Théorème 3.7. *Soit L une algèbre de Hopf et soit V un objet L-galoisien à droite. Alors il existe une algèbre de Hopf H et une structure d'algèbre H-comodule sur V telle que V soit un objet L-H-bigaloisien.*

De plus, si B est une algèbre de Hopf telle que V soit une algèbre B-comodule et un objet L-B-bigaloisien, alors il existe un isomorphisme d'algèbres de Hopf $f : H \to B$ unique et tel que $\delta_B = (f \otimes \mathrm{id}_V)\delta_H$ où δ_B et δ_H sont les coactions de B et H sur V respectivement.

3.2 Le Théorème de Schauenburg

En général, notre stratégie pour construire des équivalences de catégories de comodules (équivalences monoïdales) est basée sur le théorème suivant, provenant de [55], qui montre que le lien entre équivalences de catégories monoïdales et objets bigaloisiens est très fort, et justifie leur introduction pour notre propos :

Théorème 3.8. *(Schauenburg) Soient H, L des algèbres de Hopf. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe une équivalence de catégories monoïdales k-linéaires*

$$\mathrm{Comod}(H) \cong^{\otimes} \mathrm{Comod}(L).$$

2. *Il existe un objet L-H-bigaloisien.*

Détaillons les ingrédients nécessaires à la construction d'une équivalence monoïdale à partir d'un objet bigaloisien. On va construire une nouvelle opération, le produit cotensoriel de comodules, qui, appliqué au cas particulier d'un objet bigaloisien, fournira une équivalence entre catégories de comodules. On se réfère à [63], [62] et [55].

Remarque 3.9. Sauf mention contraire, on considère des objet H-galoisiens à gauche et des H-comodules à droite.

Définition 3.10. Soit H une algèbre de Hopf et soient $(V, \alpha_V) \in \mathrm{Comod}(H)$, $(W, \beta_W) \in \mathrm{Comod}^l(H)$. On définit par

$$V \Box_H W := \ker(\mathrm{id}_V \otimes \beta_W - \alpha_V \otimes \mathrm{id}_W) \subset V \otimes W$$

le *produit cotensoriel de V et W (au dessus de H).*

Le produit cotensoriel induit un foncteur

$$\begin{aligned} \omega_W : \mathrm{Comod}(H) &\to \mathrm{Vect}(k) \\ V &\mapsto V \Box_H W. \end{aligned}$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.11. *([63]) Soient H une algèbre de Hopf, A un objet H-galoisien. Le foncteur*

$$\begin{aligned} \omega_A : \mathrm{Comod}(H) &\to \mathrm{Vect}(k) \\ V &\mapsto V \Box_H A \end{aligned}$$

est monoïdal.

La démonstration repose sur les isomorphismes suivants :

Proposition 3.12. *Soient H une algèbre de Hopf, A un objet H-galoisien, V et W des H-comodules. Les applications suivantes sont des isomorphismes de H-comodules :*

1. $\varphi_0 : k \to k \Box_H A, \ \alpha \mapsto \alpha \otimes 1,$
2. $\varphi_{V,W} (V \Box_H A) \otimes (W \Box_H A) \to (V \otimes W) \Box_H A, \ (v \otimes a) \otimes (w \otimes a) \mapsto v \otimes w \otimes ab.$

Remarque 3.13. Notons de plus que pour A un objet H-galoisien, V un L-H-cobimodule et W un L-comodule, l'application canonique

$$W\square_L(V\square_H A) \to (W\square_L V)\square_H A$$

est un isomorphisme.

Maintenant, si $(V, \alpha_V) \in \mathrm{Comod}(H)$, $(W, \beta_W, \alpha_W) \in \mathrm{BiComod}(H, L)$ (et donc en particulier pour un objet H-L-bigaloisien), l'application

$$\alpha_{V\square_H W} = \mathrm{id}_V \otimes \alpha_W : V\square_H W \to V\square_H W \otimes L$$

est bien définie et munit le produit cotensoriel d'une structure de L-comodule à droite.

On dispose d'un résultat plus précis :

Théorème 3.14. *(Schauenburg) Soient H, L des algèbres de Hopf et soit A une algèbre H-L-cobimodule telle que A soit un objet H-galoisien. On a alors un foncteur monoïdal k-linéaire*

$$\begin{aligned}\omega_A : \mathrm{Comod}(H) &\to \mathrm{Comod}(L)\\ V &\mapsto V\square_H A.\end{aligned}$$

Si de plus A est un objet L-galoisien (à gauche), alors ω_A est une équivalence de catégories monoïdales.

Dans le cas $H = L$, la preuve de ce théorème permet de munir l'ensemble des classe d'isomorphismes d'objets H-H-bigaloisiens d'une structure de groupe, dont la multiplication est donnée par le produit cotensoriel. On a alors un morphisme de groupes

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{Hopf}}(H) \to \mathrm{BiGal}(H),\ \ f \mapsto [H^f]$$

de noyau $\mathrm{CoInn}(H) := \{f \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Hopf}}(H); \exists\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(H, k) \text{ avec } f = (\phi \circ S) \star \mathrm{id}_H \star\phi\}$ et on note

$$\mathrm{CoOut}(H) := \mathrm{Aut}_{\mathrm{Hopf}}(H)/\mathrm{CoInn}(H).$$

Si de plus l'équivalence de catégories monoïdales conserve les dimensions, on a le résultat suivant :

Théorème 3.15. *(prop. 4.2.2 de [30]) Soient H, L des algèbres de Hopf et soit F : $\mathrm{Comod}(H) \to \mathrm{Comod}(L)$ une équivalence de catégories monoïdales préservant les dimensions. Alors il existe un isomorphisme de cogèbres $\phi : H \to L$ tel que F soit isomorphe au foncteur induit ϕ_*.*

Chapitre 4

Cohomologie ([25, 55, 17])

4.1 Cocycles ([25, 55])

Définition 4.1. Soit H une algèbre de Hopf. Une application linéaire $\sigma : H \otimes H \to k$ est un *cocycle* si σ est inversible pour la convolution, si, $\forall h, k \in H$,

$$\sigma(h, 1) = \sigma(1, h) = \varepsilon(h)$$

et si

$$\sum \sigma(h_{(1)}, k_{(1)})\sigma(h_{(2)}k_{(2)}, l) = \sum \sigma(k_{(1)}, l_{(1)})\sigma(h, k_{(2)}l_{(2)}).$$

On note $Z^2(H)$ l'ensemble des cocycles sur H.

On utilise souvent des cocycles induits par des quotients d'algèbres de Hopf. Plus précisément, soit $\pi : K \to H$ un morphisme d'algèbres de Hopf surjectif. On obtient alors un cocycle sur K, $\sigma_\pi := \sigma \circ (\pi \otimes \pi) \in Z^2(K)$.

Étant donné $\sigma \in Z^2(H)$, on peut lui associer plusieurs déformations de l'algèbre de Hopf originale, voir en particulier [25, 55]. Considérons tout d'abord l'algèbre ${}_\sigma H$. En tant qu'espace vectoriel, ${}_\sigma H = H$, et le produit de ${}_\sigma H$ est défini par

$$\{x\}\{y\} = \sum \sigma(x_{(1)}, y_{(1)})\{x_{(2)}y_{(2)}\}, \quad x, y \in H,$$

où un élément $x \in H$ est noté $\{x\}$ si on le considère dans ${}_\sigma H$.

On a de plus l'algèbre $H_{\sigma^{-1}}$ (où σ^{-1} désigne l'inverse de σ pour la convolution). En tant qu'espace vectoriel, $H_{\sigma^{-1}} = H$ et le produit de $H_{\sigma^{-1}}$ est donné par

$$\langle x\rangle\langle y\rangle = \sum \sigma^{-1}(x_{(2)}, y_{(2)})\langle x_{(1)}y_{(1)}\rangle, \quad x, y \in H,$$

où un élément $x \in H$ est noté $\langle x\rangle$ si on le considère dans $H_{\sigma^{-1}}$. Les conditions de cocycle assurent que ${}_\sigma H$ et $H_{\sigma^{-1}}$ sont des algèbres associatives d'unité 1.

On a finalement l'algèbre de Hopf H^σ. En tant que cogèbre, $H^\sigma = H$, et le produit est défini par

$$[x][y] = \sum \sigma(x_{(1)}, y_{(1)})\sigma^{-1}(x_{(3)}, y_{(3)})[x_{(2)}y_{(2)}], \quad x, y \in H,$$

où un élément $x \in H$ est noté $[x]$ si on le considère dans H^σ, et l'antipode de H^σ est défini par la formule

$$S^\sigma([x]) = \sum \sigma(x_{(1)}, S(x_{(2)}))\sigma^{-1}(S(x_{(4)}), x_{(5)})[S(x_{(3)})].$$

En particulier, H et H^σ sont isomorphes en tant que cogèbres et ont des catégories de comodules équivalentes.

On a le théorème suivant, qui est un cas particulier du théorème 7.2.2 dans [46].

Théorème 4.2. *Soient H, L des algèbres de Hopf telles que H et L sont isomorphes en tant que cogèbres. Alors il existe $\sigma \in Z^2(H)$ tel que H^σ et L soient isomorphes comme algèbres de Hopf.*

4.2 Cohomologie paresseuse ([17])

Dans le cas où H n'est plus cocommutative, la convolution de deux cocycles n'est plus nécessairement un cocycle. Bichon et Carnovale ont développé une théorie des cocycles qui possèdent un bon comportement pour la convolution. Voir [17].

Un *cocycle paresseux* $\sigma : H \otimes H \to k$ est un cocycle σ au sens de la définition 4.1 et qui satisfait la condition supplémentaire

$$\sum \sigma(x_{(1)}, y_{(1)})x_{(2)}y_{(2)} = \sum x_{(1)}y_{(1)}\sigma(x_{(2)}, y_{(2)})$$

pour tout $x, y \in H$. On note $H^2_\ell(H)$ l'ensemble des cocycles paresseux de H ; il est muni d'une structure de groupe pour la convolution.

Pour $\sigma \in H^2_\ell(H)$, l'algèbre ${}_\sigma H$, munie d'une structure de H-cobimodule *via* la comultiplication, est un objet H-bigaloisien, qu'on note $H(\sigma)$.

Si A est un objet H-H-bigaloisien, A est un *objet galoisien biclivé* s'il existe un isomorphisme de H-H-cobimodules $A \simeq H$; on note $\mathrm{BiCleft}(H)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes des objets galoisiens biclivés de H.

Théorème 4.3. *Soit A un objet H-galoisien. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est biclivé.*
2. *Il existe un cocycle paresseux $\sigma \in H^2_\ell(H)$ tel que $Z \simeq H(\sigma)$ comme algèbres H-cobimodules.*

Le produit cotensoriel munit $\mathrm{BiCleft}(H)$ d'une structure de groupe :

Proposition 4.4. *Soit H une algèbre de Hopf. Alors* $\mathrm{BiCleft}(H)$ *est un sous-groupe normal du groupe* $\mathrm{BiGal}(H)$.

On a alors l'isomorphisme suivant :

Théorème 4.5. *Soit H une algèbre de Hopf. On a un isomorphisme de groupes*

$$H^2_\ell(H) \to \mathrm{BiCleft}(H),\ \sigma \mapsto [H(\sigma)].$$

Du point de vue des catégories monoïdales, $\mathrm{BiCleft}(H)$ est le sous-groupe de $\mathrm{BiGal}(H)$ formé des classe d'isomorphismes des auto-équivalences monoïdales linéaires de la catégorie des H-comodules qui sont isomorphes, en tant que foncteurs, au foncteur identité.

Chapitre 5

Cogroupoïdes ([15])

En général, on considèrera les objets bigaloisiens dans le contexte des cogroupoïdes.

Définition 5.1. Une *k-cocatégorie* $\mathcal{C}$ est la donnée de :
- un ensemble d'objets $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$,
- pour tous objets $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, une k-algèbre $\mathcal{C}(X, Y)$,
- pour tous objets $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, des morphismes d'algèbres

$$\Delta^Z_{X,Y} : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{C}(X, Z) \otimes \mathcal{C}(Z, Y) \text{ et } \varepsilon_X : \mathcal{C}(X, X) \to k$$

tels que pour tous objets $X, Y, Z, T \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(X,Y) \arrow[r, "\Delta^Z_{X,Y}"] \arrow[d, "\Delta^T_{X,Y}"'] & \mathcal{C}(X,Z) \otimes \mathcal{C}(Z,Y) \arrow[d, "\Delta^T_{X,Z} \otimes \mathrm{id}"'] \\
\mathcal{C}(X,T) \otimes \mathcal{C}(T,Y) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \Delta^Z_{T,Y}"] & \mathcal{C}(X,T) \otimes \mathcal{C}(T,Z) \otimes \mathcal{C}(Z,Y)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(X,Y) \arrow[d, "\Delta^Y_{X,Y}"] \arrow[dr, equal] & \\
\mathcal{C}(X,Y) \otimes \mathcal{C}(Y,Y) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \varepsilon_Y"] & \mathcal{C}(X,Y)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(X,Y) \arrow[d, "\Delta^X_{X,Y}"] \arrow[dr, equal] & \\
\mathcal{C}(X,X) \otimes \mathcal{C}(X,Y) \arrow[r, "\varepsilon_X \otimes \mathrm{id}"] & \mathcal{C}(X,Y).
\end{tikzcd}$$

Définition 5.2. Une cocatégorie $\mathcal{C}$ est dite *connexe* si $\mathcal{C}(X, Y)$ est une algèbre non-nulle pour tous objets $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Un groupoïde est une catégorie telle que tous les morphismes sont des isomorphismes. Une notion duale est la suivante.

Définition 5.3. Un *k-cogroupoïde* $\mathcal{C}$ est une cocatégorie $\mathcal{C}$ munie, pour tous objets $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, d'une application linéaire

$$S_{X,Y} : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{C}(Y, X)$$

telle que pour tous objets $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(X,X) \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[d, "\Delta^Y_{X,X}"] & k \arrow[r, "u"] & \mathcal{C}(X,Y) \\
\mathcal{C}(X,Y) \otimes \mathcal{C}(Y,X) \arrow[rr, "\mathrm{id} \otimes S_{Y,X}"] & & \mathcal{C}(X,Y) \otimes \mathcal{C}(X,Y) \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(X,X) \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[d, "\Delta^Y_{X,X}"] & k \arrow[r, "u"] & \mathcal{C}(Y,X) \\
\mathcal{C}(X,Y) \otimes \mathcal{C}(Y,X) \arrow[rr, "S_{X,Y} \otimes \mathrm{id}"] & & \mathcal{C}(Y,X) \otimes \mathcal{C}(Y,X) \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}$$

où m, u désignent respectivement la multiplication et l'unité de $\mathcal{C}(X, Y)$.

Remarquons que les axiomes assurent que, dans un cogroupoïde $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}(X,X)$ est une algèbre de Hopf. Le lien avec les objets bigaloisiens est le suivant :

Proposition 5.4. *Soit $\mathcal{C}$ un cogroupoïde connexe. Alors pour tous objets $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, l'algèbre $\mathcal{C}(X,Y)$ est un objet $\mathcal{C}(X,X)$-$\mathcal{C}(Y,Y)$-bigaloisien.*

Combinant ce résultat avec le théorème de Schauenburg, on obtient :

Corollaire 5.5. *Soit $\mathcal{C}$ un cogroupoïde connexe. Alors pour tous objets $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, il existe une équivalence de catégories monoïdales k-linéaires*

$$\mathrm{Comod}(\mathcal{C}(X,X)) \simeq^{\otimes} \mathrm{Comod}(\mathcal{C}(Y,Y)).$$

On justifie notre approche en énonçant que la théorie des objets de Hopf-Galois est en fait équivalente à celle des cogroupoïdes connexes.

Théorème 5.6. *Soient H et L des algèbres de Hopf. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe une équivalence de catégories monoïdales k-linéaires*

$$\mathrm{Comod}(H) \simeq^{\otimes} \mathrm{Comod}(L).$$

2. *Il existe un cogroupoïde connexe $\mathcal{C}$ avec deux objets $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ tel que $H = \mathcal{C}(X,X)$ et $L = \mathcal{C}(Y,Y)$.*

Théorème 5.7. *Soit H une algèbre de Hopf et soit A un objet H-galoisien à gauche. Alors il existe un cogroupoïde connexe $\mathcal{C}$ avec deux objets $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ tel que $H = \mathcal{C}(X,X)$ et $A = \mathcal{C}(X,Y)$.*

Ainsi, la stratégie pour trouver une équivalence monoïdale entre deux algèbres de Hopf est de construire un cogroupoïde connexe qui les contient. On dispose du critère suivant pour montrer qu'un cogroupoïde est connexe :

Proposition 5.8. *Soit $\mathcal{C}$ un cogroupoïde. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathcal{C}$ est connexe.*
2. *Il existe $X_0 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ tel que pour tout objet $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathcal{C}(X_0, Y) \neq (0)$.*
3. *Il existe $X_0 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ tel que pour tout objet $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathcal{C}(Y, X_0) \neq (0)$.*

Chapitre 6

Le lemme du diamant ([11])

Pour résumer ce qui vient d'être dit, on ramène souvent la construction d'une équivalence monoïdale de catégories de comodules à la vérification qu'une certaine algèbre est non-nulle. Un outil très utile est le lemme du diamant ([11]) dont on présente une version simplifiée venant de [40].

Soit $A := k < x_1, \ldots, x_r >$ l'algèbre libre engendrée par les générateurs $x_1, \ldots, x_r$. En notant $I = \{1, \ldots, r\}$, l'ensemble des monômes $X := \{x_{i_1} ... x_{i_n} \mid n \in \mathbb{N}, i_1, \ldots, i_n \in I\}$ est une base de A. On définit un ordre "$\leq$" sur X : deux monômes de différentes longueurs sont ordonnés suivant leurs tailles, et deux monômes de longueurs égales sont ordonnés lexicographiquement suivant leurs indices. Soit

$$\Pi = \{(x_{i_k}, f_k), k = 1, \ldots, s; x_{i_k} \in X, f_k \in A\}.$$

On dit que Π est compatible avec l'ordre "$\leq$" si chaque f_k est combinaison linéaire d'éléments $\leq x_{i_k}$.

Pour $x, y \in X$, soit r_{xky} l'application linéaire sur A qui envoie l'élément de base $xx_{i_k}y$ sur xf_ky et laisse les autres fixes. Une application r_{xky} est appelée une réduction. Un monôme $x \in X$ est dit réduit si $r(x) = x$ pour toute réduction r. Notons R l'ensemble des composées de réductions.

On dit que deux éléments x_{i_k} et x_{i_l} forment une ambigüité de recouvrement s'il existe $x, y, z \in X - \{1\}$ tels que $x_{i_k} = xy$ et $x_{i_l} = yz$. Une telle ambigüité est dite résoluble s'il existe $r, r' \in R$ tels que $r(f_kz) = r'(xf_l)$. De même, on dit que deux éléments x_{i_k} et x_{i_l} $(k \neq l)$ forment une ambigüité d'inclusion s'il existe $x, y \in X$ tels que $x_{i_k} = xx_{i_l}y$. Elle est dite résoluble s'il existe $r, r' \in R$ tels que $r(f_k) = r'(xf_ly)$.

On a alors le lemme suivant, appelé lemme du diamant :

Lemme 6.1. *Soit Ω l'algèbre engendrée par les générateurs $x_1, \ldots, x_r$ soumis aux relations $x_{i_k} - f_k = 0$ $(k = 1, \ldots, s)$. Si l'ensemble Π des paires (x_{i_k}, f_k) est compatible avec l'ordre "$\leq$" et si toutes les ambigüités sont résolubles, alors l'ensemble des mônomes réduits est une base de l'espace vectoriel Ω.*

Deuxième partie

Groupes quantiques de type de représentation $GL(2)$

Chapitre 7

Résumé de l'article "Quantum groups of $GL(2)$ representation type"

Dans ce chapitre, nous résumons l'article "Quantum groups of $GL(2)$ representation type" à paraitre dans *Journal of Noncommutative Geometry*. Cet article, complet et en anglais, constitue le chapitre 8.

On classifie les algèbres de Hopf cosemisimples ayant un semi-anneau de représentations isomorphe à celui de $GL(2)$. Cela nous amène à définir une nouvelle famille d'algèbres de Hopf qui généralisent le groupe quantique des similitudes d'une forme bilinéaire non-dégénérée. Une étude détaillée de ces algèbres de Hopf nous en donne une classification à isomorphismes près et une description de leurs catégories de comodules.

Dans ce chapitre, k désigne un corps commutatif.

7.1 L'algèbre de Hopf $\mathcal{G}(A, B)$

Cet article, motivé par la classification des $SL(2)$-déformations donnée par Bichon [13], propose une étude de l'algèbre suivante :

Définition 7.1. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et soient $A, B \in GL_n(k)$. On considère l'algèbre suivante $\mathcal{G}(A, B)$: il s'agit de l'algèbre engendrée par les générateurs $x_{ij}(1 \leq i, j \leq n), d, d^{-1}$ soumis aux relations

$$x^t A x = Ad, \quad x B x^t = Bd, \quad dd^{-1} = 1 = d^{-1}d,$$

où x est la matrice $(x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Soient $n \geq 2$ et $A, B \in GL_n(k)$. Donnons les premières propriétés de l'algèbre $\mathcal{G}(A, B)$ définie ci-dessus. La proposition suivante sera généralisée au cadre des cogroupoïdes dans la section suivante.

Proposition 7.2. *L'algèbre $\mathcal{G}(A, B)$ admet une structure d'algèbre de Hopf, pour laquelle la comultiplication $\Delta : \mathcal{G}(A, B) \to \mathcal{G}(A, B) \otimes \mathcal{G}(A, B)$ est définie par*

$$\Delta(x_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \otimes x_{kj}, 1 \leq i, j \leq n, \ \Delta(d^{\pm}) = d^{\pm} \otimes d^{\pm},$$

la co-unité $\varepsilon : \mathcal{G}(A, B) \to k$ est définie par

$$\varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq n, \ \varepsilon(d^{\pm}) = 1$$

et l'antipode $S : \mathcal{G}(A,B) \to \mathcal{G}(A,B)^{op}$ *est défini par*

$$S(x) = d^{-1}A^{-1}x^tA, \ \ S(d^{\pm}) = d^{\mp}.$$

L'algèbre de Hopf $\mathcal{G}(A,B)$ vérifie la propriété universelle suivante :

Proposition 7.3. *Soit H une algèbre de Hopf possédant un élément groupe-like $d \in Gr(H)$ et soit V un H-comodule de dimension finie n. Soit $a : V \otimes V \to D$ et $b : D \to V \otimes V$ des morphismes de H-comodules (où D désigne le H-comodule induit par d) tels que les formes bilinéaires induites soient non-dégénérées. Alors il existe $A, B \in GL_n(k)$ telles que :*

1. *V et D sont des $\mathcal{G}(A,B)$-comodules tels que a et b sont $\mathcal{G}(A,B)$-colinéaires.*
2. *Il existe un unique morphisme d'algèbres de Hopf $\psi : \mathcal{G}(A,B) \to H$ tel que $(\mathrm{id}_D \otimes \psi) \circ \alpha_D = \alpha'_D$ et $(\mathrm{id}_V \otimes \psi) \circ \alpha_V = \alpha'_V$ (où α et α' désignent les coactions de $\mathcal{G}(A,B)$ et H respectivement).*

Le lemme suivant va limiter notre choix de matrices $A, B \in GL_n(k)$. La démonstration est donnée par le lemme de Schur.

Lemme 7.4. *Soit H comme dans la proposition précédente, et supposons que V est un H-comodule simple. Alors l'application*

$$D \otimes V \xrightarrow{b \otimes \mathrm{id}} V \otimes V \otimes V \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes a} V \otimes D \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes b} V \otimes V \otimes V \xrightarrow{a \otimes \mathrm{id}} D \otimes V$$

est un multiple non-nul de l'identité, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in k^*$ tel que

$$(a \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes b) \circ (\mathrm{id} \otimes a) \circ (b \otimes \mathrm{id}) = \lambda \, \mathrm{id}_{D \otimes V}\,.$$

Quand $H = \mathcal{G}(A,B)$, cette relation se traduit par $B^tA^tBA = \lambda I_n$.

Finissons ce paragraphe par les remarques suivantes. D'abord, pour un bon choix de matrices $A, B \in GL_n(k)$, l'algèbre de Hopf $\mathcal{G}(A,B)$ coïncide avec les quantifications standards de l'algèbre de fonctions $\mathcal{O}(GL_2(k))$. Précisément, on a :

- Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & 0 \end{pmatrix} := A_q$ et $B = A_p$, avec $q, p \in k^*$, on obtient la quantification à deux paramètres de $GL_2(k)$:

$$\mathcal{G}(A_q, A_p) = \mathcal{O}(GL_{q,p}(2)).$$

- Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & h \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -h' & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, avec $h, h' \in k$, on obtient le cas jordanien quantique :

$$\mathcal{G}(A,B) = \mathcal{O}^J_{h,h'}(GL(2)).$$

De plus, il existe un morphisme surjectif d'algèbres de Hopf

$$\mathcal{G}(A, A^{-1}) \to \mathcal{B}(A).$$

On peut alors considérer $\mathcal{G}(A, A^{-1})$ comme l'algèbre de Hopf représentant le groupe quantique des similitudes de la forme bilinéaire induite par A.

7.2 Le cogroupoïde $\mathcal{G}$

Pour décrire les catégories de comodules des $\mathcal{G}(A, B)$, nous allons construire un cogroupoïde liant ces algèbres de Hopf.

Soient $n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq 2$ et soient $A, B \in GL_n(k)$, $C, D \in GL_m(k)$. On définit l'algèbre

$$\mathcal{G}(A, B|C, D) := k\left\langle d, d^{-1}, x_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \;\middle|\; \begin{array}{l} x^t Ax = Cd, \\ xDx^t = Bd, \end{array} \; d^{-1}d = 1 = dd^{-1} \right\rangle$$

Bien sûr, les générateurs x_{ij}, d et d^{-1} dans $\mathcal{G}(A, B|C, D)$ devraient être désignés par $x_{ij}^{AB,CD}$, $d_{AB,CD}$ et $d_{AB,CD}^{-1}$ pour exprimer la dépendance en $(A, B), (C, D)$, mais s'il n'y a pas de confusion, nous les écrirons x_{ij}, d et d^{-1}. On a clairement $\mathcal{G}(A, B|A, B) = \mathcal{G}(A, B)$.

Le lemme suivant définit les applications de structure qui nous permettront de construire un cogroupoïde autour des algèbres $\mathcal{G}(A, B|C, D)$.

Lemme 7.5. *Pour chaque couple de matrices $A, B \in GL_n(k)$, $C, D \in GL_m(k)$ et $X, Y \in GL_p(k)$, il existe des morphismes d'algèbres*

$$\Delta_{AB,CD}^{XY} : \mathcal{G}(A, B|C, D) \to \mathcal{G}(A, B|X, Y) \otimes \mathcal{G}(X, Y|C, D)$$

tel que $\Delta(x_{ij}) = \sum_{k=1}^{p} x_{ik} \otimes x_{kj}$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$, $\Delta(d^{\pm 1}) = d^{\pm 1} \otimes d^{\pm 1}$,

$$\varepsilon_{AB} : \mathcal{G}(A, B) \to k$$

tel que $\varepsilon_{AB}(x_{ij}) = \delta_{ij}$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$, $\varepsilon(d) = 1 = \varepsilon(d^{-1})$ et

$$S_{AB,CD} : \mathcal{G}(A, B|C, D) \to \mathcal{G}(C, D|A, B)^{op}$$

défini par $S_{AB,CD}(x) = A^{-1}d^{-1}x^tC$, $S_{AB,CD}(d^{\pm 1}) = d^{\mp 1}$ satisfaisant les relations de la définition des cogroupoïdes.

La démonstration de l'existence utilise la propriété universelle des algèbres $\mathcal{G}(A, B|C, D)$ et la vérification des axiomes est immédiate sur les générateurs. On peut alors définir le cogroupoïde suivant :

Définition 7.6. Le cogroupoïde $\mathcal{G}$ est défini par :

1. $\text{Ob}(\mathcal{G}) = \{(A, B) \in GL_m(k) \times GL_m(k), m \geq 1\}$,
2. pour $(A, B), (C, D) \in \text{Ob}(\mathcal{G})$, l'algèbre $\mathcal{G}(A, B|C, D)$ est l'algèbre donnée ci-dessus,
3. les applications de structure $\Delta_{\bullet,\bullet}^{\bullet}$, $\varepsilon_{\bullet}$ et $S_{\bullet,\bullet}$ sont données dans le lemme précédent.

La recherche d'équivalence monoïdale se ramène maintenant à l'étude de la connexité de ce cogroupoïde, qui nous donnera alors l'existence d'un objet bigaloisien et donc de l'équivalence recherchée *via* le théorème de Schauenburg. On a le lemme suivant :

Lemme 7.7. *Soit $q \in k^*$ et soient $C, D \in GL_m(k)$ $(m \geq 2)$ telles que* $\text{tr}(CD^t) = 1 + q^2$ *et $D^tC^tDC = q^2 I_m$. Alors l'algèbre $\mathcal{G}(A_q, A_q|C, D)$ est non-nulle.*

La démonstration de ce lemme utilise le lemme du diamant sur une algèbre intermédiaire $\mathcal{M}(A_q, A_q|C, D)$ dont une localisation sera $\mathcal{G}(A_q, A_q|C, D)$. Comme conséquence du lemme 7.7, on obtient le théorème suivant.

Théorème 7.8. *Soient $A, B \in GL_n(k)$ $(n \geq 2)$ telles que $B^tA^tBA = \lambda I_n$ pour $\lambda \in k^*$ et soit $q \in k^*$ tel que $q^2 - \sqrt{\lambda^{-1}}\,\mathrm{tr}(AB^t)q + 1 = 0$. Alors il existe une équivalence de catégories monoïdales k-linéaires*

$$\mathrm{Comod}(\mathcal{G}(A,B)) \simeq^{\otimes} \mathrm{Comod}(\mathcal{O}(GL_q(2)))$$

entre les catégories de comodules de $\mathcal{G}(A,B)$ et $\mathcal{O}(GL_q(2))$ respectivement.

7.3 Les $GL(2)$-déformations

Dans ce paragraphe, on suppose que k est de caractéristique nulle. Le théorème 7.8 et la théorie des représentations de $GL_q(2)$ permettent de compléter la classification des $GL(2)$-déformations.

En particulier, le théorème 7.8 et la théorie des représentations de $GL_q(2)$ assurent que lorsque le couple $A, B \in GL_n(k)$ est bien choisi, l'algèbre de Hopf $\mathcal{G}(A,B)$ est une $GL(2)$-déformation. Le théorème suivant donne une réciproque à cet énoncé. Rappelons que $q \in k^*$ est dit générique si q n'est pas une racine de l'unité ou si $q \in \{\pm 1\}$.

Théorème 7.9. *On suppose que char$(k) = 0$. Les algèbres de Hopf cosemisimples ayant un semi-anneau de représentations isomorphe à celui de $GL_2(k)$ sont exactement les*

$$\mathcal{G}(A,B)$$

où $A, B \in GL_n(k)$ $(n \geq 2)$ satisfont $B^tA^tBA = \lambda I_n$ pour un $\lambda \in k^*$ et telles que les solutions de l'équation $X^2 - \sqrt{\lambda^{-1}}\,\mathrm{tr}(AB^t)X + 1 = 0$ sont génériques.

Enfin, le théorème suivant complète la classification des $GL(2)$-déformations.

Théorème 7.10. *On suppose que char$(k) = 0$. Soient $A, B \in GL_n(k)$ et $C, D \in GL_m(k)$ telles que $B^tA^tBA = \lambda_1 I_n$ et $D^tC^tDC = \lambda_2 I_m$ pour $\lambda_1, \lambda_2 \in k^*$. Les algèbres de Hopf $\mathcal{G}(A,B)$ et $\mathcal{G}(C,D)$ sont isomorphes si et seulement si $n = m$ et il existe $P \in GL_n(k)$ tel que l'une des égalités suivantes soit vérifiée*

$$(C,D) = (P^tAP, P^{-1}BP^{-1t}) \qquad\qquad (C,D) = (P^tB^{-1}P, P^{-1}A^{-1}P^{-1t}).$$

Notons que l'étude des équivalences de catégories $\mathrm{Comod}(\mathcal{G}(A,B)) \to \mathrm{Comod}(\mathcal{G}(C,D))$ permet d'énoncer le critère d'équivalence monoïdale suivant pour les algèbres de Hopf $\mathcal{G}(A,B)$.

Corollaire 7.11. *Soient $A, B \in GL_n(k)$, $C, D \in GL_m(k)$ telles que $B^tA^tBA = \lambda_{A,B} I_n$ et $D^tC^tDC = \lambda_{C,D} I_m$. Posons $\mu_{A,B} := \mathrm{tr}(AB^t)$ et $\mu_{C,D} := \mathrm{tr}(CD^t)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe une équivalence monoïdale*

$$\mathrm{Comod}(\mathcal{G}(A,B)) \simeq^{\otimes} \mathrm{Comod}(\mathcal{G}(C,D))$$

entre les catégories de comodules de $\mathcal{G}(A,B)$ et $\mathcal{G}(C,D)$ respectivement.

2. *On a*

$$\lambda_{A,B}^{-1}\mu_{A,B}^2 = \lambda_{C,D}^{-1}\mu_{C,D}^2.$$

7.4 Objets de Hopf-Galois de $\mathcal{G}(A, B)$

Dans cette section, on utilise les constructions et résultats précédents pour classifier les objets galoisiens et bigaloisiens de $\mathcal{G}(A, B)$.

D'après le travail d'Ulbrich [63], pour chaque objet H-galoisien A, il existe un foncteur fibre Ω : Comod$(H) \to$ Vect$_f(k)$. L'idée de la classification (qui suit [2]) est d'étudier la façon dont le foncteur fibre transforme le morphisme fondamental de la catégorie des comodules.

Théorème 7.12. *Soient $A, B \in GL_n(k)$ $(n \geq 2)$ telles que $B^tA^tBA = \lambda I_n$ pour $\lambda \in k^*$, et soit Z un objet $\mathcal{G}(A, B)$-galoisien à gauche. Alors il existe $m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$, et des matrices $C, D \in GL_m(k)$ satisfaisant $D^tC^tDC = \lambda I_m$ et $\mathrm{tr}(AB^t) = \mathrm{tr}(CD^t)$ telles que $Z \simeq \mathcal{G}(A, B|C, D)$ comme objets galoisiens.*

Cette classification est complétée par le théorème suivant :

Théorème 7.13. *Soient $A, B \in GL_n(k)$ telles que $B^tA^tBA = \lambda I_n$ et soient $C_1, D_1 \in GL_{m_1}(k)$, $C_2, D_2 \in GL_{m_2}(k)$ telles que les algèbres $\mathcal{G}(A, B|C_1, D_1)$ et $\mathcal{G}(A, B|C_2, D_2)$ soient des objets $\mathcal{G}(A, B)$-galoisiens (n, m_1 et $m_2 \geq 2$). Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathcal{G}(A, B|C_1, D_1)$ et $\mathcal{G}(A, B|C_2, D_2)$ sont isomorphes comme objets galoisiens.*
2. *$m_1 = m_2 := m$ et il existe une matrice $M \in GL_m(k)$ telle que*

$$(C_2, D_2) = (M^{-1t}C_1M^{-1}, MD_1M^t).$$

7.5 Le cas compact

Dans cette section, $k = \mathbb{C}$. On classifie les algèbres de Hopf compactes qui sont des $GL(2)$-déformations. On parle alors de $U(2)$-déformations. Tout d'abord, donnons un exemple de structure de $*$-algèbre de Hopf dans le cadre des $\mathcal{G}(A, B)$:

Lemme 7.14. *Soit $E \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\overline{E}^tE^t\overline{E}E = \lambda I_n$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et l'algèbre de Hopf $\mathcal{G}(E, \overline{E})$ est une algèbre de Hopf compacte pour la structure :*

$$d^* = d^{-1} \text{ et } \overline{x} = E^td^{-1}xE^{-1t}.$$

L'algèbre de Hopf compacte $\mathcal{G}(E, \overline{E})$ sera notée $A_{\tilde{o}}(E)$.

La notation $A_{\tilde{o}}(E)$ suit l'article [10] dans lequel $\tilde{O}_n$ désigne le sous-groupe de $U_n(\mathbb{C})$ engendré par $O_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{T}.I_n$. D'après le théorème 7.8, les algèbres de Hopf compactes $A_{\tilde{o}}(E)$ sont effectivement des $U(2)$-déformations. On peut montrer la réciproque suivante :

Théorème 7.15. *Les algèbres de Hopf compactes dont le semi-anneau de représentations est isomorphe à celui de $U_2(\mathbb{C})$ sont exactement les*

$$A_{\tilde{o}}(E)$$

où $E \in GL_n(\mathbb{C})$ $(n \geq 2)$ vérifie $\overline{E}^tE^t\overline{E}E = \lambda I_n$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Chapitre 8

Quantum groups of $GL(2)$ representation type ([47])

We classify the cosemisimple Hopf algebras whose corepresentation semi-ring is isomorphic to that of $GL(2)$. This leads us to define a new family of Hopf algebras which generalize the quantum similitude group of a non-degenerate bilinear form. A detailed study of these Hopf algebras gives us an isomorphic classification and the description of their corepresentation categories.

8.1 Introduction and main results

There are many approaches to the classification problem for quantum groups, depending on what group theory aspect one wants to emulate. Our approach is based on Tannaka-Krein reconstruction theory, which shows deep links between a Hopf algebra and its corepresentation category. Keeping that in mind, we investigate the problem of classifying Hopf algebras according to their corepresentation semi-ring, a problem already considered by several authors [70, 71, 41, 3, 5, 50, 51, 33, 13]. In the present paper, we consider the $GL(2)$-case and we classify (in characteristic zero) the cosemisimple Hopf algebras having a corepresentation semi-ring isomorphic to the one of $GL(2)$.

Let k be an algebraically closed field, let $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ and let $A, B \in GL_n(k)$. We consider the following algebra $\mathcal{G}(A, B)$: it is the universal algebra with generators $(x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}, d, d^{-1}$ satisfying the relations

$$x^t A x = Ad \quad xBx^t = Bd \quad dd^{-1} = 1 = d^{-1}d,$$

where x is the matrix $(x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. This algebra has a natural Hopf algebra structure and might be seen as a generalization of the Hopf algebra corresponding to the quantum similitude group of a non-degenerate bilinear form. The Hopf algebras $\mathcal{G}(A, B)$ can be constructed as localizations of FRT-bialgebras [31] associated to Yang-Baxter operators constructed by Gurevich [32]. When $n = 2$ and for particular matrices A, B, these were used by Ohn ([51]) in order to classify quantum $GL_2(\mathbb{C})$'s. Let $q \in k^*$. For a well chosen matrix $A_q \in GL_2(k)$, we have $\mathcal{G}(A_q, A_q) = \mathcal{O}(GL_q(2))$, the function algebra on the quantum group $GL_q(2)$. Our first result describes the monoidal category of comodules over $\mathcal{G}(A, B)$ for some matrices $A, B \in GL_n(k)$.

Théorème 8.1. *Let $A, B \in GL_n(k)$ $(n \geq 2)$ such that $B^t A^t B A = \lambda I_n$ for some $\lambda \in k^*$ and let $q \in k^*$ such that $q^2 - \sqrt{\lambda^{-1}}\,\mathrm{tr}(AB^t)q + 1 = 0$. Then there is a k-linear equivalence* *of monoidal categories*

$$\mathrm{Comod}(\mathcal{G}(A,B)) \simeq^{\otimes} \mathrm{Comod}(\mathcal{O}(GL_q(2)))$$

between the comodule categories of $\mathcal{G}(A,B)$ *and* $\mathcal{O}(GL_q(2))$ *respectively.*

This result is inspired by the paper of Bichon [13], which gives similar results for the quantum group of a non-degenerate bilinear form. As in [13], the result is proved by constructing some appropriate Hopf bi-Galois objects and by using a theorem of Schauenburg [55]. The Hopf bi-Galois objects we construct are part of a connected cogroupoid [15]. The technical difficulty in this approach is to study the connectedness of this cogroupoid.

We use Theorem 8.1 to classify, in characteristic zero, all the cosemisimple Hopf algebras whose corepresentation semi-ring is isomorphic to that of $GL_2(k)$. Recall that $q \in k^*$ is said to be generic if q is not a root of unity or if $q \in \{\pm 1\}$.

Théorème 8.2. *Assume that char*$(k) = 0$. *The Hopf algebras whose corepresentation semi-ring is isomorphic to that of* $GL_2(k)$ *are exactly the*

$$\mathcal{G}(A,B)$$

with $A, B \in GL_n(k)$ $(n \geq 2)$ *satisfying* $B^tA^tBA = \lambda I_n$ *for some* $\lambda \in k^*$ *and such that any solution of the equation* $X^2 - \sqrt{\lambda^{-1}}\,\mathrm{tr}(AB^t)X + 1 = 0$ *is generic.*

A particular case of the theorem was already known if one requires the fundamental comodule of H to be of dimension 2 ([51]). A similar classification (without dimension constraint) was obtained by Bichon ([13]) in the $SL(2)$ case (the compact $SU(2)$ case had been done by Banica [3]). The $SL(3)$ case with dimension constraints has been studied by Ohn ([50]). Other related results have been given in the $SU(N)$ and $SL(N)$ case by Banica ([5]) and Phung Ho Hai ([33]), in terms of Hecke symmetries. It is worth to note that in principle Theorem 8.2 could be deduced by the combination of Phung Ho Hai's work [33] and Gurevich's classification of Hecke symmetries of rank two [32]. We believe that the present approach, using directly pairs of invertible matrices, is more explicit and simpler.

We also give a version of Theorem 8.2 in the compact case.

Finally the following theorem will complete the classification of $GL(2)$-deformations.

Théorème 8.3. *Assume that char*$(k) = 0$. *Let* $A, B \in GL_n(k)$ *and let* $C, D \in GL_m(k)$ *such that* $B^tA^tBA = \lambda_1 I_n$ *and* $D^tC^tDC = \lambda_2 I_m$ *for* $\lambda_1, \lambda_2 \in k^*$. *The Hopf algebras* $\mathcal{G}(A,B)$ *and* $\mathcal{G}(C,D)$ *are isomorphic if and only if* $n = m$ *and there exists* $P \in GL_n(k)$ *such that either*

$$(C,D) = (P^tAP, P^{-1}BP^{-1t}) \text{ or } (C,D) = (P^tB^{-1}P, P^{-1}A^{-1}P^{-1t}).$$

We will also provide the classification of the Hopf algebra $\mathcal{G}(A,B)$ up to monoidal equivalence (Corollary 8.16).

The paper is organized as follows : in Sec. 2 we introduce the Hopf algebras $\mathcal{G}(A,B)$ and discuss some basic properties ; in Sec. 3, we build a cogroupoid linking the Hopf algebra $\mathcal{G}(A,B)$ and study its connectedness : this will prove Theorem 8.1 ; in Sec. 4 we prove Theorem 8.2 and Theorem 8.3 ; in Sec. 5, we classify $\mathcal{G}(A,B)$-Galois objects up to isomorphisms, its group of bi-Galois objects and its lazy cohomology group ; finally, Sec. 6 is devoted to study the $GL(2)$-deformations in the compact case.

Throughout the paper k is an algebraically closed field. We assume that the reader is familiar with Hopf algebras and their monoidal categories of comodules (corepresentations), and with Hopf-Galois objects. See [46, 55].

8.2 The Hopf algebra $\mathcal{G}(A, B)$

Let $n \geq 2$ and $A, B \in GL_n(k)$. The algebra $\mathcal{G}(A, B)$ has been defined in the introduction. In this section, we briefly discuss its Hopf algebra structure, its universal property and some of its basic properties.

The following result will be generalized at the cogroupoid level in the next section, where the proof is given.

Proposition 8.4. *The algebra $\mathcal{G}(A, B)$ admits a Hopf algebra structure, with comultiplication Δ defined by*

$$\Delta(x_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \otimes x_{kj}, 1 \leq i, j \leq n, \ \Delta(d^{\pm}) = d^{\pm} \otimes d^{\pm},$$

with counit ε defined by

$$\varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq n, \ \varepsilon(d^{\pm}) =, 1$$

and with antipode S defined by

$$S(x) = d^{-1}A^{-1}x^t A, \ S(d^{\pm}) = d^{\mp}.$$

We now give (and sketch the proof of) the universal property of the Hopf algebra $\mathcal{G}(A, B)$:

Proposition 8.5. *Let H be a Hopf algebra with a group-like element $d \in Gr(H)$ and let V be a finite-dimensional H-comodule of dimension n. Let $a : V \otimes V \to D$ and $b : D \to V \otimes V$ be two H-comodule morphisms (where D denotes the H-comodule induced by d) such that the underlying bilinear forms are non-degenerate. Then there exist $A, B \in GL_n(k)$ such that :*

1. *V and D have a $\mathcal{G}(A, B)$-comodule structure and a and b are $\mathcal{G}(A, B)$-comodule morphisms,*
2. *there exists a unique Hopf algebra morphism $\psi : \mathcal{G}(A, B) \to H$ such that $(\mathrm{id}_D \otimes \psi) \circ \alpha_D = \alpha'_D$ and $(\mathrm{id}_V \otimes \psi) \circ \alpha_V = \alpha'_V$ (where α and α' denote the coactions of $\mathcal{G}(A, B)$ and H respectively).*

Démonstration. Let $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ be a basis of V and $x = (x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ be the associated matrix of coefficients. Let $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ be the matrices such that $a(v_i \otimes v_j) = a_{ij}d$ and $b(d) = \sum_{ij} b_{ij} v_i \otimes v_j$. It is straightforward to check that a and b are H-colinear if and only if $x^t A x = Ad$ and $xBx^t = Bd$. Finally, since $Gr(H)$ is a group, there exists $d^{-1} \in H$ such that $dd^{-1} = 1 = d^{-1}d$. The universal property of $\mathcal{G}(A, B)$ gives us the result. $\square$

The following lemma will limit our choice of matrices $A, B \in GL_n(k)$. The proof comes directly from Schur's lemma.

Lemme 8.6. *Let H be as in the previous proposition, and assume that the H-comodule V is irreducible. Then the composition*

$$D \otimes V \xrightarrow{b \otimes \mathrm{id}} V \otimes V \otimes V \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes a} V \otimes D \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes b} V \otimes V \otimes V \xrightarrow{a \otimes \mathrm{id}} D \otimes V \ .$$

is a multiple of the identity, i.e there exists $\lambda \in k^*$ such that :

$$(a \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes b) \circ (\mathrm{id} \otimes a) \circ (b \otimes \mathrm{id}) = \lambda \, \mathrm{id}_{D \otimes V}$$

When $H = \mathcal{G}(A, B)$, the relation may be rewritten as

$$B^t A^t B A = \lambda I_n.$$

The next result is part of the isomorphic classification of the Hopf algebras $\mathcal{G}(A, B)$.

Proposition 8.7. *Let $A, B \in GL_n(k)$ and let $P, Q \in GL_n(k)$. The Hopf algebras $\mathcal{G}(A, B)$, $\mathcal{G}(P^t A P,\ P^{-1} B P^{-1t})$ and $\mathcal{G}(Q^t B^{-1} Q, Q^{-1} A^{-1} Q^{-1t})$ are isomorphic.*

Démonstration. Considering the first case, we denote by x_{ij}, d and d^{-1}, y_{ij}, d and d^{-1} $(1 \leq i, j \leq n)$ the respective generators of $\mathcal{G}(A, B)$ and $\mathcal{G}(P^t A P,\ P^{-1} B P^{-1t})$. The defining relations

$$y^t (P^t A P) y = (P^t A P) d, \text{ and } y(P^{-1} B P^{-1t}) y^t = (P^{-1} B P^{-1t}) d$$

ensure that we have an isomorphism

$$f : \mathcal{G}(A, B) \to \mathcal{G}(P^t A P, P^{-1} B P^{-1t})$$

satisfying $f(x) = P y P^{-1}$, $f(d) = d$ and $f(d^{-1}) = d^{-1}$, with inverse $f^{-1}(y) = P^{-1} x P$, $f^{-1}(d) = d$ and $f^{-1}(d^{-1}) = d^{-1}$.

In the second case, denoting the generators of $\mathcal{G}(Q^t B^{-1} Q, Q^{-1} A^{-1} Q^{-1t})$ by y_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$, d and d^{-1}, the same considerations on the defining relations

$$y^t (Q^t B^{-1} Q) y = (Q^t B^{-1} Q) d, \text{ and } y(Q^{-1} A^{-1} Q^{-1t}) y^t = (Q^{-1} A^{-1} Q^{-1t}) d$$

together with the commutation relations in $\mathcal{G}(A, B)$

$$(AB) x^t d^{-1} = d^{-1} x^t (AB)$$

give us an isomorphism

$$f : \mathcal{G}(A, B) \to \mathcal{G}(Q^t B^{-1} Q, Q^{-1} A^{-1} Q^{-1t})$$

satisfying $f(x) = Q y d^{-1} Q^{-1}$, $f(d) = d^{-1}$ and $f(d^{-1}) = d$, with inverse $f^{-1}(y) = Q^{-1} x d^{-1} Q$, $f^{-1}(d) = d^{-1}$ and $f^{-1}(d^{-1}) = d$. $\square$

Let us note that for a good choice of matrices $A, B \in GL_n(k)$, the Hopf algebra $\mathcal{G}(A, B)$ coincides with the standard quantization of the function algebra $\mathcal{O}(GL_2(k))$: precisely, a straightforward computation shows that

- for $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & 0 \end{pmatrix} := A_q$ and $B = A_p$, for some $q, p \in k^*$, we get the two-parameter standard quantum $GL_2(k)$:

$$\mathcal{G}(A_q, A_p) = \mathcal{O}(GL_{q,p}(2)),$$

- and for $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & h \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} -h' & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, with $h, h' \in k$, we get the Jordanian quantum case :

$$\mathcal{G}(A, B) = \mathcal{O}^J_{h,h'}(GL(2))$$

(the defining relations of this two algebras can be found in [51]).

Moreover, we can see that we have a surjective Hopf algebra morphism

$$\mathcal{G}(A, A^{-1}) \to \mathcal{B}(A)$$

where $\mathcal{B}(A)$ is the Hopf algebra representing the quantum automorphism group of the non-degenerate bilinear form associated to A, introduced by Dubois-Violette and Launer in [27]. In view of its definition, we can consider $\mathcal{G}(A, A^{-1})$ as the Hopf algebra representing the quantum similitude group of this non degenerate bilinear form.

8.3 The cogroupoid $\mathcal{G}$

To prove Theorem 8.1 by using Schauenburg's results from [55], we now proceed to construct Hopf-bigalois objects linking the Hopf algebras $\mathcal{G}(A, B)$ and in order to do our computations in a nice context, we put the algebras $\mathcal{G}(A, B)$ in a cogroupoid framework. We recall some basic definitions and facts about these objects (for more precise informations, we refer to [15]).

Définition 8.8. A *k-cogroupoid* $\mathcal{C}$ consists of :

– a set of objects $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

– For any $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, a k-algebra $\mathcal{C}(X, Y)$.

– For any $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, algebra morphisms

$$\Delta^Z_{X,Y} : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{C}(X, Z) \otimes \mathcal{C}(Z, Y) \text{ and } \ \varepsilon_X : \mathcal{C}(X, X) \to k$$

and linear maps

$$S_{X,Y} : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{C}(Y, X)$$

satisfying several compatibility diagrams : see [15], the axioms are dual to the axioms defining a groupoid.

A cogroupoid $\mathcal{C}$ is said to be *connected* if $\mathcal{C}(X, Y)$ is a non zero algebra for any $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Let $n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq 2$ and let $A, B \in GL_n(k)$, $C, D \in GL_m(k)$. We define the algebra

$$\mathcal{G}(A, B|C, D) := k \left\langle d, d^{-1}, x_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \left| \begin{array}{l} x^t A x = Cd, \\ x D x^t = Bd \end{array}, \ d^{-1}d = 1 = dd^{-1} \right. \right\rangle$$

Of course the generators x_{ij}, d and d^{-1} in $\mathcal{G}(A, B|C, D)$ should be denoted by $x^{AB,CD}_{ij}$, $d_{AB,CD}$ and $d^{-1}_{AB,CD}$ to express the dependence on $(A, B), (C, D)$, but there will be no confusion and we simply denote them by x_{ij}, d and d^{-1}. It is clear that $\mathcal{G}(A, B|A, B) = \mathcal{G}(A, B)$.

In the following lemma, we construct the structural maps that will put the algebras $\mathcal{G}(A, B|C, D)$ in a cogroupoid framework.

Lemme 8.9. – *For any $A, B \in GL_n(k)$, $C, D \in GL_m(k)$ and $X, Y \in GL_p(k)$, there exist algebra maps*

$$\Delta^{XY}_{AB,CD} : \mathcal{G}(A, B|C, D) \to \mathcal{G}(A, B|X, Y) \otimes \mathcal{G}(X, Y|C, D)$$

such that $\Delta(x_{ij}) = \sum_{k=1}^p x_{ik} \otimes x_{kj}$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$, $\Delta(d^{-1}) = d^{-1} \otimes d^{-1}$, and

$$\varepsilon_{AB} : \mathcal{G}(A, B) \to k$$

such that $\varepsilon_{AB}(x_{ij}) = \delta_{ij}$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$, $\varepsilon(d) = 1 = \varepsilon(d^{-1})$, and for any $M, N \in GL_r(k)$, the following diagrams commute :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(A, B|C, D) \arrow[r, "\Delta^{XY}_{AB,CD}"] \arrow[d, "\Delta^{MN}_{AB,CD}"'] & \mathcal{G}(A, B|X, Y) \otimes \mathcal{G}(X, Y|C, D) \arrow[d, "\Delta^{MN}_{AB,XY} \otimes \mathrm{id}"] \\ \mathcal{G}(A, B|M, N) \otimes \mathcal{G}(M, N|C, D) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \Delta^{XY}_{MN,CD}"'] & \mathcal{G}(A, B|M, N) \otimes \mathcal{G}(M, N|X, Y) \otimes \mathcal{G}(X, Y|C, D) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(A,B|C,D) \arrow[d, "\Delta^{CD}_{AB,CD}"'] \arrow[dr] & \\ \mathcal{G}(A,B|C,D)\otimes\mathcal{G}(C,D) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon_{CD}"'] & \mathcal{G}(A,B|C,D) \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{G}(A,B|C,D) \arrow[d, "\Delta^{AB}_{AB,CD}"'] \arrow[dr] & \\ \mathcal{G}(A,B)\otimes\mathcal{G}(A,B|C,D) \arrow[r, "\varepsilon_{AB}\otimes\mathrm{id}"'] & \mathcal{G}(A,B|C,D) \end{tikzcd}$$

– *For any $A, B \in GL_n(k)$, $C, D \in GL_m(k)$, there exists an algebra map*

$$S_{AB,CD} : \mathcal{G}(A,B|C,D) \to \mathcal{G}(C,D|A,B)^{op}$$

defined by the formula $S_{AB,CD}(x) = A^{-1}d^{-1}x^tC$, $S_{AB,CD}(d^{\pm 1}) = d^{\mp 1}$, such that the following diagrams commute :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(A,B) \arrow[r, "\varepsilon_{AB}"] \arrow[d, "\Delta^{CD}_{AB,AB}"'] & k \arrow[r, "u"] & \mathcal{G}(A,B|C,D) \\ \mathcal{G}(A,B|C,D)\otimes\mathcal{G}(C,D|A,B) \arrow[rr, "id\otimes S_{CD,AB}"'] & & \mathcal{G}(A,B|C,D)\otimes\mathcal{G}(A,B|C,D) \arrow[u, "m"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(A,B) \arrow[r, "\varepsilon_{AB}"] \arrow[d, "\Delta^{CD}_{AB,AB}"'] & k \arrow[r, "u"] & \mathcal{G}(A,B|C,D) \\ \mathcal{G}(A,B|C,D)\otimes\mathcal{G}(C,D|A,B) \arrow[rr, "S_{AB,CD}\otimes id"'] & & \mathcal{G}(C,D|A,B)\otimes\mathcal{G}(A,B|C,D) \arrow[u, "m"'] \end{tikzcd}$$

Démonstration. First we have to check that the algebra maps are well defined.

Let $A, B \in GL_n(k)$, $C, D \in GL_m(k)$ and $X, Y \in GL_p(k)$; in order to simplify the notations, we denote $\Delta^{XY}_{AB,CD} = \Delta$, $\varepsilon_{AB} = \varepsilon$ and $S_{AB,CD} = S$. We only give the computations for the first relation $x^tAx = Cd$, the computations for second one being similar.

For $\Delta : \mathcal{G}(A,B|C,D) \to \mathcal{G}(A,B|X,Y)\otimes\mathcal{G}(X,Y|C,D)$, we compute :

$$\begin{aligned} \Delta(x^tAx)_{ij} &= \Delta(\sum_{kl} A_{kl}x_{ki}x_{lj}) = \sum_{kl} A_{kl}(\sum_p x_{kp}\otimes x_{pi})(\sum_q x_{lq}\otimes x_{qj}) \\ &= \sum_{pq}\sum_{kl} A_{kl}x_{kp}x_{lq}\otimes x_{pi}x_{qj} = \sum_{pq}(x^tAx)_{pq}\otimes x_{pi}x_{qj} \in \mathcal{G}(A,B|X,Y)\otimes\mathcal{G}(X,Y|C,D) \\ &= \sum_{pq} X_{pq}d\otimes x_{pi}x_{qj} = d\otimes(x^tXx)_{ij} = C_{ij}d\otimes d \end{aligned}$$

and the computations for $\varepsilon : \mathcal{G}(A,B) \to k$ are :

$$\begin{aligned} \varepsilon((x^tAx)_{ij}) &= \varepsilon(\sum_{kl} A_{kl}x_{ki}x_{lj}) = \sum_{kl} A_{kl}\varepsilon(x_{ki})\varepsilon(x_{lj}) \\ &= \sum_{kl} A_{kl}\delta_{ki}\delta_{lj} = A_{ij} = A_{ij}\varepsilon(d) \end{aligned}.$$

Then $\Delta^{XY}_{AB,CD}$ and ε_{AB} are well defined. These maps are algebra maps, so it is enough to check the commutativity of the diagrams of the first part on the generators of $\mathcal{G}(A,B|C,D)$, which is obvious.

Recall that if $\Phi : A \to B^{op}$ is an algebra map, then we have $\Phi(ab) = (\Phi(b)^t\Phi(a)^t)^t$ for all matrices $a, b \in M_n(A)$.

Then, for $S : \mathcal{G}(A,B|C,D) \to \mathcal{G}(C,D|A,B)^{op}$, we have :

$$
\begin{aligned}
S(C^{-1}d^{-1}x^tAx) &= \left(S(x)^tA^tS(x)d(C^{-1})^t\right)^t \\
&= \left((C^td^{-1}x(A^{-1})^t)A^t(d^{-1}A^{-1}x^tC)d(C^{-1})^t\right)^t \\
&= \left(C^td^{-1}xd^{-1}A^{-1}x^tCd(C^{-1})^t\right)^t \\
&= \left(C^td^{-1}d(C^{-1})^t\right)^t \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

We can check in the same way that S is compatible with the second relation, and then $S = S_{AB,CD}$ is well defined. The commutativity of the diagrams follows from the verification on the generators of $\mathcal{G}(A,B)$ and the fact that $\Delta^{\bullet}_{\bullet,\bullet}$, $\varepsilon_{\bullet}$ and $S_{\bullet,\bullet}$ are algebra maps. $\square$

The lemma allows the following definition :

Définition 8.10. The cogroupoid $\mathcal{G}$ is the cogroupoid defined as follows :

1. $\mathrm{Ob}(\mathcal{G}) = \{(A,B) \in GL_m(k) \times GL_m(k), m \geq 1\}$,
2. for $(A,B),(C,D) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$, the algebra $\mathcal{G}(A,B|C,D)$ is the algebra defined above,
3. the structural maps $\Delta^{\bullet}_{\bullet,\bullet}$, $\varepsilon_{\bullet}$ and $S_{\bullet,\bullet}$ are defined in the previous lemma.

So we have a cogroupoid linking all the Hopf algebras $\mathcal{G}(A,B)$. The following result is part of the isomorphic classification of the algebras $\mathcal{G}(A,B|C,D)$, which will be completed in Theorem 8.21, and this proposition will be used in the appendix.

Proposition 8.11. *Let $A,B,P \in GL_n(k)$, $C,D,Q \in GL_m(k)$. We have algebra isomorphisms*

$$\mathcal{G}(A,B|C,D) \simeq \mathcal{G}(P^tAP, P^{-1}BP^{-1t}|Q^tCQ, Q^{-1}DQ^{-1t}),$$
$$\mathcal{G}(A,B|C,D) \simeq \mathcal{G}(B^{-1},A^{-1}|D^{-1},C^{-1}).$$

Démonstration. For the first case, let us denote by y_{ij} $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$, d, d^{-1} the generators of $\mathcal{G}(P^tAP, P^{-1}BP^{-1t}|Q^tCQ, Q^{-1}DQ^{-1t})$. Then the relations

$$x^t(P^tAP)x = (Q^tCQ)d, \text{ and } x(Q^{-1}DQ^{-1t})x^t = (P^{-1}BP^{-1t})d$$

ensure that we have an algebra morphism

$$\psi : \mathcal{G}(A,B|C,D) \to \mathcal{G}(P^tAP, P^{-1}BP^{-1t}|Q^tCQ, Q^{-1}DQ^{-1t})$$

defined by $\psi(d) = d$, $\psi(d^{-1}) = d^{-1}$ and $\psi(x) = PyQ^{-1}$. The inverse map is then defined by $\psi^{-1}(d) = d$, $\psi^{-1}(d^{-1}) = d^{-1}$ et $\psi^{-1}(y) = P^{-1}xQ$.

For the second case, let us denote the generators of $\mathcal{G}(B^{-1},A^{-1}|D^{-1},C^{-1})$ by y_{ij} $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$, d, d^{-1}. Then the relations

$$y^tB^{-1}y = D^{-1}d, \text{ and } yC^{-1}y^t = A^{-1}d$$

ensure that we have an algebra morphism

$$\psi : \mathcal{G}(A,B|C,D) \to \mathcal{G}(B^{-1},A^{-1}|D^{-1},C^{-1})$$

given by $\psi(d^{\pm}) = d^{\mp}$ and $\psi(x) = yd^{-1}$. This is an isomorphism with inverse map defined by $\psi^{-1}(d^{\pm}) = d^{\mp}$ and $\psi^{-1}(y) = xd^{-1}$. $\square$

Now the natural question is to study the connectedness of $\mathcal{G}$, which will ensure that we indeed get Hopf-Galois objects and hence equivalences of monoidal categories.

Lemme 8.12. *Let $q \in k^*$ and let $C, D \in GL_m(k)$ ($m \geq 2$) such that $\operatorname{tr}(CD^t) = 1 + q^2$ and $D^t C^t DC = q^2 I_m$. Then the algebra $\mathcal{G}(A_q, A_q | C, D)$ is non zero.*

The (technical) proof of this result is done in the appendix. We get the following corollary.

Corollaire 8.13. *Let $\lambda, \mu \in k^*$. Consider the full subcogroupoid $\mathcal{G}^{\lambda,\mu}$ of $\mathcal{G}$ with objects*

$$\operatorname{Ob}(\mathcal{G}^{\lambda,\mu}) = \{(A, B) \in \operatorname{Ob}(\mathcal{G}); B^t A^t BA = \lambda I_n (n \geq 2) \text{ and } \operatorname{tr}(AB^t) = \mu\}.$$

Then $\mathcal{G}^{\lambda,\mu}$ is a connected cogroupoid.

Démonstration. Let $(A, B) \in \operatorname{Ob}(\mathcal{G}^{\lambda,\mu})$. By the relations defining those algebras, if $\alpha, \beta \in k^*$, $C, D \in GL_m(k)$ then :

$$\mathcal{G}(A, B|C, D) = \mathcal{G}(\alpha A, \beta B|\alpha C, \beta D).$$

Choose $q \in k^*$ satisfying $q^2 - \sqrt{\lambda^{-1}}\mu q + 1 = 0$ and put $A' = \sqrt{\lambda^{-1}}A$ and $B' = qB$. We have $\operatorname{tr}(A'B'^t) = 1 + q^2$ and $B'^t A'^t B' A' = q^2 I_m$. By Lemma 8.12, we have that $\mathcal{G}(A_q, A_q|A', B')$ is non zero and so is $\mathcal{G}(\sqrt{\lambda}A_q, q^{-1}A_q|A, B)$. Then we have found $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{G}^{\lambda,\mu})$ such that $\mathcal{G}(X|A, B) \neq (0)$ for all $(A, B) \in \operatorname{Ob}(\mathcal{G}^{\lambda,\mu})$. According to [15], Proposition 2.15, the cogroupoid $\mathcal{G}^{\lambda,\mu}$ is connected. □

Hence by Corollaire 5.5, we have the following result :

Théorème 8.14. *Let $(A, B), (C, D) \in \operatorname{Ob}(\mathcal{G}^{\lambda,\mu})$. Then we have a k-linear equivalence of monoidal categories*

$$\operatorname{Comod}(\mathcal{G}(A, B)) \simeq^{\otimes} \operatorname{Comod}(\mathcal{G}(C, D))$$

between the comodule categories of $\mathcal{G}(A, B)$ and $\mathcal{G}(C, D)$ respectively.

We are ready to prove Theorem 8.1.

Proof of Theorem 8.1. First, note that we have $\mathcal{G}(A, B) = \mathcal{G}(\alpha A, \beta B)$ for all $\alpha, \beta \in k^*$. Let $q \in k^*$ such that $q^2 - \sqrt{\lambda^{-1}} \operatorname{tr}(AB^t)q + 1 = 0$. Then, by the above theorem, we have a k-linear equivalence of monoidal categories

$$\operatorname{Comod}(\mathcal{G}(A, B)) = \operatorname{Comod}(\mathcal{G}(\sqrt{\lambda^{-1}}A, qB)) \simeq^{\otimes} \operatorname{Comod}(\mathcal{O}(GL_q(2)))$$

and we are done. □

8.4 $GL(2)$-deformations

In this section k will be an algebraically closed field of characteristic zero. This paragraph is essentially devoted to the proof of Theorem 8.2. We also complete the isomorphic and monoidal equivalence classifications of the Hopf algebras $\mathcal{G}(A, B)$.

Recall that the corepresentation semi-ring (or fusion semi-ring) of a cosemisimple Hopf algebra H, denoted $\mathcal{R}^+(H)$, is the set of isomorphism classes of finite-dimensional H-comodules. The direct sum of comodules defines the addition while the tensor product of comodules defines the multiplication. The isomorphism classes of simple H-comodules form a basis of $\mathcal{R}^+(H)$. The isomorphism class of a finite-dimensional H-comodule V is denoted by $[V]$.

Let K be another cosemisimple Hopf algebra, and let $f : H \to K$ a Hopf algebra morphism. Then f induces a monoidal functor $f_* : \mathrm{Comod}_f(H) \to \mathrm{Comod}_f(K)$ and a semi-ring morphism $f_* : \mathcal{R}^+(H) \to \mathcal{R}^+(K)$. A semi-ring isomorphism $\mathcal{R}^+(H) \simeq \mathcal{R}^+(K)$ induces a bijective correspondence (that preserves tensor products) between the isomorphism classes of simple comodules of H and K.

Let G be a reductive algebraic group. As usual we say that the cosemisimple Hopf algebra H is a G-deformation if $\mathcal{R}^+(\mathcal{O}(G)) \simeq \mathcal{R}^+(H)$. Hence Theorem 8.2 classifies $GL(2)$-deformations.

We now recall the representation theory of $GL_q(2)$. Our references are Ohn [51] for the generic case and the root of unity case can be adapted from the representation theory of $SL_q(2)$ given by Kondratowicz and Podlès in [41].

- Let first assume that $q \in k^*$ is generic. Then $\mathcal{O}(GL_q(2))$ is cosemisimple and there are two family $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(D^{\otimes e})_{e\in\mathbb{Z}}$ of non-isomorphic simple comodules (except for $U_0 = D^{\otimes 0} = k$) such that $((n,e),(m,f) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z})$
  - $\dim_k(U_n) = n+1$ and $\dim_k(D) = 1$,
  - $(U_n \otimes D^{\otimes e}) \otimes (U_m \otimes D^{\otimes f}) \cong (U_m \otimes D^{\otimes f}) \otimes (U_n \otimes D^{\otimes e}) \cong \bigoplus_{i=0}^{min(n,m)} U_{n+m-2i} \otimes D^{\otimes e+f+i}$.

  Moreover, every simple $\mathcal{O}(GL_q(2))$-comodule is isomorphic to one of the comodules $U_n \otimes D^{\otimes e} =: U_{(n,e)}$.
- Now assume that $q \in k^*$ is not generic. Let $N \geq 3$ be its order. Put

$$N_0 = \begin{cases} N & \text{if } N \text{ is odd,} \\ N/2 & \text{if } N \text{ is even.} \end{cases}$$

  Then there exists three families $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(U_m)_{1\leq m\leq N_0-1}$ and $(D^{\otimes e})_{e\in\mathbb{Z}}$ of non-isomorphic simple comodules (except for $V_0 = U_0 = D^{\otimes 0} = k$) such that $(n \in \mathbb{N}, m = 0, 1, \dots, N_0 - 1)$
  - $\dim_k(V_n) = n+1, \dim_k(U_m) = m+1$ and $\dim(D) = 1$,
  - $V_n \otimes V_1 \simeq V_1 \otimes V_n \simeq V_{n+1} \oplus \big(V_{n-1} \otimes D^{\otimes N_0}\big)$,
  - $U_m \otimes U_1 \simeq U_1 \otimes U_m \simeq U_{m+1} \oplus \big(U_{m-1} \otimes D\big)$.

  Moreover the comodules $V_n \otimes U_m \otimes D^{\otimes e}$ are simple and every simple $\mathcal{O}(GL_q(2))$-comodule is isomorphic to one of these.
  The comodule $U_{N_0-1} \otimes U_1$ is not semisimple. It has a simple filtration

$$(0) \subset U_{N_0-2} \otimes D \subset Y \subset U_{N_0-1} \otimes U_1$$

  such that

$$U_{N_0-1} \otimes U_1/Y \simeq U_{N_0-2} \otimes D \text{ and } Y/U_{N_0-2} \otimes D \simeq V_1.$$

Let $A, B \in GL_n(k)$. We denote by V_n^{AB}, U_m^{AB} and D_{AB} the simple $\mathcal{G}(A,B)$-comodules corresponding to the simple $\mathcal{O}(GL_q(2))$-comodules V_n, U_m and D, and sometimes we note $U_{(m,e)}^{AB} = U_m^{AB} \otimes D_{AB}^{\otimes e}$.
The following lemma will be very useful.

Lemme 8.15. *Let $A, B \in GL_n(k)$ and let $C, D \in GL_m(k)$ such that $B^tA^tBA = \lambda I_n$, $D^tC^tDC = \lambda I_m$ and $\mathrm{tr}(AB^t) = \mathrm{tr}(CD^t)$. Let $\Omega : \mathrm{Comod}(\mathcal{G}(A,B)) \to \mathrm{Comod}(\mathcal{G}(C,D))$ be an equivalence of monoidal categories.*

If $\mathcal{G}(A,B)$ et $\mathcal{G}(C,D)$ are cosemisimple, we have either, for $(n,e) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$:

–
$$\Omega(U^{AB}_{(0,1)}) \simeq U^{CD}_{(0,1)} \textit{ and then } \Omega(U^{AB}_{(n,e)}) \simeq U^{CD}_{(n,e)}$$

– *or*
$$\Omega(U^{AB}_{(0,1)}) \simeq U^{CD}_{(0,-1)} \textit{ and then } \Omega(U^{AB}_{(n,e)}) \simeq U^{CD}_{(n,-n-e)}.$$

If $\mathcal{G}(A,B)$ et $\mathcal{G}(C,D)$ are not cosemisimple, we have either, for $n \in \mathbb{N}, e \in \mathbb{Z}, m \in \{0,\dots,N_0-1\}$:

– $\Omega(U^{AB}_{(0,1)}) \simeq U^{CD}_{(0,1)}$ *and then*
$$\Omega(V^{AB}_n) \simeq V^{CD}_n \textit{and } \Omega(U^{AB}_{(m,e)}) \simeq U^{CD}_{(m,e)}$$

– *or* $\Omega(U^{AB}_{(0,1)}) \simeq U^{CD}_{(0,-1)}$ *and then*
$$\Omega(V^{AB}_n) \simeq V^{CD}_n \otimes U^{CD}_{(0,-n)} \textit{ and } \Omega(U^{AB}_{(m,e)}) \simeq U^{CD}_{(m,-m-e)}.$$

Démonstration. Assume first that the algebras $\mathcal{G}(A,B)$ and $\mathcal{G}(C,D)$ are cosemisimple. According to the fusion rule, $U_{(0,1)} \otimes U_{(0,1)} \simeq U_{(0,2)}$, so $\Omega(U^{AB}_{(0,1)}) \otimes \Omega(U^{AB}_{(0,1)})$ is simple, i.e. there exists $s(\Omega) \in \mathbb{Z}$ such that
$$\Omega(U^{AB}_{(0,1)}) \simeq U^{CD}_{(0,s(\Omega))}.$$
Then, we have
$$\Omega(U^{AB}_{(0,e)}) \simeq U^{CD}_{(0,s(\Omega)e)} \ \forall e \in \mathbb{Z}.$$
Similarly, if $\Lambda : \mathrm{Comod}(\mathcal{G}(C,D)) \to \mathrm{Comod}(\mathcal{G}(A,B))$ is a monoidal quasi-inverse for Ω, we have
$$\Lambda(U^{CD}_{(0,e)}) \simeq U^{AB}_{(0,s(\Lambda)e)} \ \forall e \in \mathbb{Z}$$
and in particular
$$\Lambda(U^{CD}_{(0,s(\Omega))}) \simeq U^{AB}_{(0,s(\Lambda)s(\Omega))} \simeq U^{AB}_{(0,1)}$$
and then $s(\Omega) \in \{-1,1\}$.

Next, we have $U_{(1,0)} \otimes U_{(1,0)} \simeq U_{(2,0)} \oplus U_{(0,1)}$, and, by the fusion rules, the only simple $\mathcal{G}(C,D)$-comodules W such that $W \otimes W$ is direct sum of two simple comodules are the $(U^{CD}_{(1,p)})_{p\in\mathbb{Z}}$. Hence there exists $p \in \mathbb{Z}$ such that
$$\Omega(U^{AB}_{(1,0)}) \simeq U^{CD}_{(1,p)}.$$
We have : by $U_{(1,0)} \otimes U_{(1,0)} \simeq U_{(2,0)} \oplus U_{(0,1)}$ and since Ω is monoidal we deduce that
$$U^{CD}_{(1,p)} \otimes U^{CD}_{(1,p)} \simeq \Omega(U^{AB}_{(2,0)}) \oplus U^{CD}_{(0,s(\Omega))}.$$
On the other hand :
$$U^{CD}_{(1,p)} \otimes U^{CD}_{(1,p)} \simeq U^{CD}_{(2,2p)} \oplus U^{CD}_{(0,2p+1)}.$$
We deduce from the uniqueness of the decomposition into simple comodules that $U^{CD}_{(0,2p+1)} \simeq U^{CD}_{(0,s(\Omega))}$ and then that
$$(p, s(\Omega)) \in \{(0,1),\ (-1,-1)\}.$$
By induction, we get $\forall (n,e) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$, $\Omega(U^{AB}_{(n,e)}) \simeq U^{CD}_{(n,e)}$ if $s(\Omega)=1$ and $\Omega(U^{AB}_{(n,e)}) \simeq U^{CD}_{(n,-n-e)}$ if $s(\Omega)=-1$.

Consider now the non-cosemisimple case : in the same way as above, we get
$$\Omega(U^{AB}_{(0,1)}) \simeq U^{CD}_{(0,s(\Omega))} \text{ with } s(\Omega) \in \{-1,1\}.$$

Moreover V_1^{AB} is simple, so $\Omega(V_1^{AB}) \simeq V_n^{CD} \otimes U_{(m,p)}^{CD}$ with $n \in \mathbb{N}, m \in \{0, \ldots, N_0 - 1\}$, $(n,m) \neq (0,0), p \in \mathbb{Z}$. Similarly we have $\Omega(U_{(1,0)}^{AB}) \simeq V_k^{CD} \otimes U_{(l,t)}^{CD}$ with $k \in \mathbb{N}, l \in \{0, \ldots, N_0 - 1\}$, $(k,l) \neq (0,0), t \in \mathbb{Z}$. Then we have

$$\Omega(V_1^{AB} \otimes U_{(1,0)}^{AB}) \simeq V_n^{CD} \otimes U_{(m,p)}^{CD} \otimes V_k^{CD} \otimes U_{(l,t)}^{CD}$$

but since $V_1^{AB} \otimes U_{(1,0)}^{AB}$ is still simple, we must have either $n = l = 0$ or $m = k = 0$. In the first case, we have $\Omega(U_{(1,0)}^{AB}) \simeq V_k^{CD} \otimes U_{(0,t)}^{CD}$. But $(U_{(1,0)}^{AB})^{\otimes N_0}$ is not semisimple whereas $(V_k^{CD})^{\otimes N_0} \otimes U_{(0,t+N_0)}^{CD}$ is. So we have $m = k = 0$ and

$$\Omega(V_1^{AB}) \simeq V_n^{CD} \otimes U_{(0,p)}^{CD}.$$

By the cosemisimple case, we have

$$(p, s(\Omega)) \in \{(0,1),\ (-1,-1)\}$$

$\Omega(V_n^{AB}) \simeq V_n^{CD}$ or $\Omega(V_n^{AB}) \simeq V_n^{CD} \otimes U_{(0,-n)}^{CD}, \forall n \in \mathbb{N}$

Let Z be a simple $\mathcal{G}(A,B)$-comodule such that $\Omega(Z) \simeq U_{(1,0)}^{CD}$. We have $Z \simeq V_n^{AB} \otimes U_{(m,e)}^{AB}$ and then

$$U_{(1,0)}^{CD} \simeq V_n^{CD} \otimes \Omega(U_{(m,0)}^{AB}) \otimes U_{(0,p)}^{CD} \quad (\text{with} \;\; p \in \{e, -n-e\})$$

By the fusion rules we get the following inequalities :

$$\dim(\Omega(U_{(1,i_1)}^{AB})) < \dim(\Omega(U_{(2,i_2)}^{AB})) < \cdots < \dim(\Omega(U_{(N_0-1,i_{N_0-1})}^{AB}))$$

and then if $m > 1$ we have $\dim(\Omega(U_{(m,e)}^{AB})) < \dim(U_{(1,j)}^{CD})$. On the other side, another glance at the fusion rules shows that the $U_{(1,j)}^{CD}, j \in \mathbb{Z}$, are the simple comodules (that are not one dimensional) of the smallest dimension. Hence $m = 1$ and $Z \simeq U_{(1,e)}^{AB}$. The same arguments as above show us that $(e, s(\Omega)) \in \{(0,1),\ (-1,-1)\}$. □

We are now able to complete the proof of Theorem 8.3 and the isomorphic classification of the Hopf algebras $\mathcal{G}(A,B)$.

Proof of Theorem 8.3. We have already proved that the Hopf algebras $\mathcal{G}(A,B)$, $\mathcal{G}(P^tAP, P^{-1}BP^{-1t})$ and $\mathcal{G}(Q^tB^{-1}Q, Q^{-1}A^{-1}Q^{-1t})$ are isomorphic, see Proposition 8.7.

To prove the converse, we denote by x_{ij} $(1 \leq i,j \leq n), d$ and y_{ij} $(1 \leq i,j \leq m), d$ the respective generators of $\mathcal{G}(A,B)$ and $\mathcal{G}(C,D)$ and by x and y the corresponding matrices. By construction, the elements (x_{ij}) and (y_{ij}) are the matrix coefficients of the comodules $U_{(1,0)}^{AB}$ and $U_{(1,0)}^{CD}$, and d, d those of $U_{(0,1)}^{AB}$ and $U_{(0,1)}^{CD}$.

Let $f : \mathcal{G}(A,B) \to \mathcal{G}(C,D)$ be a Hopf algebra isomorphism and let $f_* : \mathrm{Comod}(\mathcal{G}(A,B)) \to \mathrm{Comod}(\mathcal{G}(C,D))$ be the induced equivalence of monoidal categories.

According to Lemma 8.15 and its proof, there are two cases :

If $f_*(U_{(0,1)}^{AB}) \simeq U_{(0,1)}^{CD}$ (i.e. if $f(d) = d$) then $f_*(U_{(1,0)}^{AB}) \simeq U_{(1,0)}^{CD}$. In this case, $n = m$ and there exists $P \in GL_n(k)$ such that $f(x) = PyP^{-1}$. Moreover we must have $f(d^{-1}A^{-1}x^tAx) = I_n$ and then $y^{-1} = d^{-1}(P^tAP)^{-1}y^t(P^tAP)$. But we already have $y^{-1} = S(y) = d^{-1}C^{-1}y^tC$. Since the elements x_{ij} are linearly independent, there exists $\lambda \in k^*$ such that $C = \lambda P^tAP$. Similar computations on the relation $xBx^t = Bd$, using the relations $xd(DC) = (DC)dx$ and $x^td(CD) = (CD)dx^t$, lead to $D = \mu P^{-1t}BP^{-1}, \mu \in k^*$. Since $\mathcal{G}(A,B) = \mathcal{G}(\alpha A, \beta B)$ for all $\alpha, \beta \in k^*$, we can drop λ and μ.

If $f_*(U^{AB}_{(0,1)}) \simeq U^{CD}_{(0,-1)}$ (i.e. if $f(d) = d^{-1}$), then $f_*(U^{AB}_{(1,0)}) \simeq U^{CD}_{(1,-1)}$. In this case, $m = n$ and there exists $M \in GL_n(k)$ such that $f(x) = Myd^{-1}M^{-1}$. Similar computations lead to $C = \lambda P^t B^{-1} P$ and $D = \mu P^{-1} A^{-1} P^{-1t}$, for some $\lambda, \mu \in k^*$.

$\square$

We are now ready to prove Theorem 8.2.

Proof of Theorem 8.2. First, for matrices $A, B \in GL_n(k)$ ($n \geq 2$) satisfying the conditions of the theorem, Theorem 8.1 ensures that the Hopf algebra $\mathcal{G}(A, B)$ is indeed a $GL(2)$-deformation.

Let H be a Hopf algebra whose corepresentation semi-ring is isomorphic to that of $GL_2(k)$. We denote by $U^H_{(n,e)}, (n, e) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ the simple H-comodules (with the same convention as above). From the morphisms

$$U^H_{(1,0)} \otimes U^H_{(1,0)} \to U^H_{(0,1)} \text{ and } U^H_{(0,1)} \to U^H_{(1,0)} \otimes U^H_{(1,0)},$$

we deduce the existence of two matrices $A, B \in GL_n(k)$ ($n = \dim U^H_{(1,0)}$) and of a Hopf algebra morphism

$$f : \mathcal{G}(A, B) \to H$$

such that $f_*(U^{AB}_{(0,1)}) = U^H_{(0,1)}$ and $f_*(U^{AB}_{(1,0)}) = U^H_{(1,0)}$ and by Lemma 8.6 there exists $\lambda \in k^*$ such that $B^t A^t BA = \lambda I_n$ for some $\lambda \in k^*$. By Theorem 8.1, there is a k-linear equivalence of monoidal categories

$$\mathrm{Comod}(\mathcal{G}(A, B)) \simeq^{\otimes} \mathrm{Comod}(\mathcal{O}(GL_q(2))$$

between the comodule categories of $\mathcal{G}(A, B)$ and $\mathcal{O}(GL_q(2))$ respectively, with $q \in k^*$ such that $\mathrm{tr}(AB^t) = \sqrt{\lambda}(q + q^{-1})$.

First assume that $\mathcal{G}(A, B)$ is cosemisimple. Using lemma 8.15, we get that $f_*(U^{AB}_{(n,e)}) = U^H_{(n,e)}, \forall\ (n, e) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, so f induces a semi-rings isomorphism $\mathcal{R}^+(\mathcal{G}(A, B)) \simeq \mathcal{R}^+(H)$, and then by Lemma 2.25 $f : \mathcal{G}(A, B) \to H$ is a Hopf algebra isomorphism.

Now assume that $\mathcal{G}(A, B)$ is not cosemisimple. For $(n, e) \in \{0, \dots, N_0 - 1\} \times \mathbb{Z}$, we have $f_*(U^{AB}_{(n,e)}) = U^H_{(n,e)}$. So we get :

$$f_*(U^{AB}_{(N_0-1,0)} \otimes U^{AB}_{(1,0)}) \simeq U^H_{(N_0,0)} \oplus U^H_{(N_0-2,1)},$$

but on the other hand, using the simple filtration, we have :

$$f_*(U^{AB}_{(N_0-1,0)} \otimes U^{AB}_{(1,0)}) \simeq U^H_{(N_0-2,1)} \oplus f_*(V_1) \oplus U^H_{(N_0-2,1)}.$$

This contradicts the uniqueness of the decomposition of a semisimple comodule into a direct sum of simple comodules.

Thus $\mathcal{G}(A, B)$ is cosemisimple, q is generic and f is an isomorphism. $\square$

Lemma 8.15 and the results of Section 3 gives us a monoidal equivalence criterion which, in the particular case of $\mathcal{O}(GL_{p,q}(2))$, gives Theorem 2.6 in [59], at the Hopf algebra level.

Corollaire 8.16. *Let $A, B \in GL_n(k)$, $C, D \in GL_m(k)$ such that $B^t A^t BA = \lambda_{A,B} I_n$ and $D^t C^t DC = \lambda_{C,D} I_m$. Put $\mu_{A,B} := \mathrm{tr}(AB^t)$ and $\mu_{C,D} := \mathrm{tr}(CD^t)$. The following assertions are equivalent :*

1. *There exists a k-linear equivalence of monoidal categories*

$$\mathrm{Comod}(\mathcal{G}(A,B)) \simeq^{\otimes} \mathrm{Comod}(\mathcal{G}(C,D))$$

between the comodule categories of $\mathcal{G}(A,B)$ and $\mathcal{G}(C,D)$ respectively.

2. *We have*

$$\lambda_{A,B}^{-1}\mu_{A,B}^{2} = \lambda_{C,D}^{-1}\mu_{C,D}^{2}$$

Démonstration. First, put $\kappa := \lambda_{A,B}^{-1}\mu_{A,B}^{2} = \lambda_{C,D}^{-1}\mu_{C,D}^{2}$ and let $q \in k^*$ such that $q^2 - \sqrt{\kappa}q + 1 = 0$. Then by Theorem 8.1 and its proof, we have two k-linear equivalences of monoidal categories

$$\mathrm{Comod}(\mathcal{G}(A,B)) \simeq^{\otimes} \mathrm{Comod}(\mathcal{O}(GL_q(2))) \simeq^{\otimes} \mathrm{Comod}(\mathcal{G}(C,D)).$$

For the other implication, first assume that the k-linear monoidal functor $\Omega : \mathrm{Comod}(\mathcal{G}(A,B)) \to \mathrm{Comod}(\mathcal{G}(C,D))$ satisfies $\Omega(D_{AB}) \simeq D_{CD}$. Let $(v_i^{AB})_{1\leq i\leq n}$, d_{AB} and $(v_i^{CD})_{1\leq i\leq m}$, d_{CD} be some bases of V_{AB}, D_{AB} and V_{CD}, D_{CD} respectively such that the fundamental colinear maps

$$\begin{array}{ll} a : V_{AB}\otimes V_{AB} \to D_{AB} & c : V_{CD}\otimes V_{CD} \to D_{CD} \\ b : D_{AB} \to V_{AB}\otimes V_{AB} & d : D_{CD} \to V_{CD}\otimes V_{CD} \end{array}$$

satisfy

$$a(v_i^{AB}\otimes v_j^{AB}) = A_{ij}d_{AB},\ b(d_{AB}) = \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}v_i^{AB}\otimes v_j^{AB}$$

and

$$c(v_i^{CD}\otimes v_j^{CD}) = C_{ij}d_{CD},\ d(d_{CD}) = \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij}v_i^{CD}\otimes v_j^{CD}.$$

Since Ω is monoidal, let c' and d' be the colinear map given by the compositions

$$\begin{tikzcd} c' : \Omega(V_{AB})\otimes\Omega(V_{AB}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, equal] & \Omega(V_{AB}\otimes V_{AB}) \arrow[r, "\Omega(a)"] \arrow[d, equal] & \Omega(D_{AB}) \arrow[d, equal] \\ V_{CD}\otimes V_{CD} \arrow[r] & V_{CD}\otimes V_{CD} \arrow[r] & D_{CD} \end{tikzcd}$$

and

$$\begin{tikzcd} d' : \Omega(D_{AB}) \arrow[r, "\Omega(b)"] \arrow[d, equal] & \Omega(V_{AB}\otimes V_{AB}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, equal] & \Omega(V_{AB})\otimes\Omega(V_{AB}) \arrow[d, equal] \\ D_{CD} \arrow[r] & V_{CD}\otimes V_{CD} \arrow[r] & V_{CD}\otimes V_{CD}. \end{tikzcd}$$

Then there exists $\alpha, \beta \in k^*$ such that $c' = \alpha c$ and $d' = \beta d$. Since Ω is k-linear, we can compute the colinear map given by the compositions

$$D_{CD} \to V_{CD}\otimes V_{CD} \to D_{CD}$$

and

$$V_{CD}\otimes D_{CD} \to V_{CD}^{\otimes 3} \to D_{CD}\otimes V_{CD} \to V_{CD}^{\otimes 3} \to V_{CD}\otimes D_{CD}.$$

We obtain that

$$\mu_{A,B} = \alpha\beta\mu_{C,D} \text{ and } \lambda_{A,B} = \alpha^2\beta^2\lambda_{C,D}$$

and then we have the expected equality

$$\lambda_{A,B}^{-1}\mu_{A,B}^{2} = \lambda_{C,D}^{-1}\mu_{C,D}^{2}.$$

Finally, if the k-linear monoidal functor $\Omega : \mathrm{Comod}(\mathcal{G}(A,B)) \to \mathrm{Comod}(\mathcal{G}(C,D))$ satisfy $\Omega(D_{AB}) \simeq D_{CD}^{-1}$, compose it with the functor induced by the isomorphism $\mathcal{G}(C,D) \simeq \mathcal{G}(D^{-1},C^{-1})$. We get an equivalence of monoidal categories

$$\tilde{\Omega} : \mathrm{Comod}(\mathcal{G}(A,B)) \to \mathrm{Comod}(\mathcal{G}(D^{-1},C^{-1}))$$

satisfy $\Omega(D_{AB}) \simeq D_{D^{-1},C^{-1}}$, and then

$$\lambda_{A,B}^{-1}\mu_{A,B}^{2} = \lambda_{C,D}^{-1}\mu_{C,D}^{2} = \lambda_{D^{-1},C^{-1}}^{-1}\mu_{D^{-1},C^{-1}}^{2}.$$

□

In particular, we get another proof of Theorem 2.6 in [59]. See also [21]. Recall that $\mathcal{O}(GL_{p,q}(2)) = \mathcal{G}(A_p, A_q)$ with $\lambda_{A_p,A_q} = pq$ and $\mu_{A_p,A_q} = 1+pq$.

Corollaire 8.17. *Let p,q and $p',q' \in k^*$. The following assertions are equivalent :*

1. *The Hopf algebras $\mathcal{O}(GL_{p,q}(2))$ and $\mathcal{O}(GL_{p',q'}(2))$ are cocycle deformations of each others.*
2. *We have*
$$pq = p'q' \text{ or } pq = (p'q')^{-1}.$$

Démonstration. Assume that $\mathcal{O}(GL_{p,q}(2))$ is a cocycle deformation of $\mathcal{O}(GL_{p',q'}(2))$, then

$$\mathrm{Comod}(\mathcal{O}(GL_{p,q}(2))) \simeq^{\otimes} \mathrm{Comod}(\mathcal{O}(GL_{p',q'}(2)))$$

and according to Corollary 8.16, $(pq)^{-1}(1+pq)^2 = (p'q')^{-1}(1+p'q')^2$. Then pq and $p'q'$ are roots of the polynomial $P(x) = X^2 - \Theta X + 1$ where $\Theta = (pq)^{-1} + pq = (p'q')^{-1} + p'q'$. It is easy to see that if x is a root of P, then the other root is x^{-1}. Then $pq = p'q'$ or $pq = (p'q')^{-1}$.

Conversely, if $pq = p'q'$ or $pq = (p'q')^{-1}$ then $\mathrm{Comod}(\mathcal{O}(GL_{p,q}(2))) \simeq^{\otimes} \mathrm{Comod}(\mathcal{O}(GL_{p',q'}(2)))$ and the fibre functor $\Omega : \mathrm{Comod}(\mathcal{G}(A_p, A_q)) \to \mathrm{Comod}(\mathcal{G}(A_{p'}, A_{q'})$ induced by $\mathcal{G}(A_p, A_q | A_{p'}, A_{q'})$ preserves the dimensions of the underlying vector space. Then, according to Théorème 3.15,

$$\mathcal{G}(A_{p'}, A_{q'}) \simeq \mathcal{G}(A_p, A_q) \text{ as coalgebras}$$

and there exists (see Théorème 4.2) a 2-cocycle $\sigma : H \otimes H \to k$ such that

$$\mathcal{G}(A_{p'}, A_{q'}) \simeq \mathcal{G}(A_p, A_q)_\sigma \text{ as Hopf algebras.}$$

□

8.5 Hopf-Galois objects over $\mathcal{G}(A,B)$

In this section, we use the previous constructions and results to classify the Galois and bi-Galois objects over $\mathcal{G}(A,B)$.

Let us first recall two results on Galois objects and fibre functors. The first one is well-known, and the second one is due to Schneider (see [57], [15]).

Lemme 8.18. *Let H be a Hopf algebra and let $F : \mathrm{Comod}(H) \to \mathrm{Vect}(k)$ be a monoidal functor. If V is a finite-dimensional H-comodule, then $F(V)$ is a finite dimensional vector space. Moreover we have $\dim(V) = 1 \Rightarrow \dim(F(V)) = 1$, and if F is a fibre functor then $\dim(F(V)) = 1 \Rightarrow \dim(V) = 1$.*

Lemme 8.19. *Let H be a Hopf algebra and let A, B some H-Galois objects. Any H-colinear algebra map $f : A \to B$ is an isomorphism.*

By work of Ulbrich [63], to any H-Galois objects A corresponds a fibre functor $\Omega_A : \mathrm{Comod}_f(H) \to \mathrm{Vect}_f(k)$. The idea of the classification (which follows [2]) is to study how this fibre functor will transform the fundamental morphisms of the category of comodules.

Théorème 8.20. *Let $A, B \in GL_n(k)$ $(n \geq 2)$, such that $B^tA^tBA = \lambda I_n$ for $\lambda \in k^*$, and let Z be a left $\mathcal{G}(A,B)$-Galois object. Then there exists $m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$, and two matrices $C, D \in GL_m(k)$ satisfying $D^tC^tDC = \lambda I_m$ and $\mathrm{tr}(AB^t) = \mathrm{tr}(CD^t)$ such that $Z \simeq \mathcal{G}(A, B|C, D)$ as Galois objects.*

Démonstration. Let

$$\begin{aligned} \Omega_Z : \mathrm{Comod}_f(\mathcal{G}(A,B)) &\to \mathrm{Vect}_f(k) \\ V &\mapsto V\square_{\mathcal{G}(A,B)}Z \end{aligned}$$

be the monoidal functor associated to Z. Let V_{AB} and $D_{AB}^{\pm 1}$ denote the fundamental comodules of $\mathcal{G}(A,B)$, and let $(v_i)_{1\leq i\leq n}$ and $d_{AB}^{\pm 1}$ be their bases such that the fundamental colinear maps

$$a : V_{AB} \otimes V_{AB} \to D_{AB}$$
$$b : D_{AB} \to V_{AB} \otimes V_{AB}$$

satisfy $a(v_i \otimes v_j) = A_{ij}d_{AB}$ and $b(d_{AB}) = \sum_{i,j=1}^n B_{ij}v_i \otimes v_j$.

Let $(w_i)_{1\leq i\leq m}$ and $d^{\pm 1}$ be respective basis of $\Omega_Z(V_{AB})$ and $\Omega_Z(D_{AB}^{\pm 1})$. By construction of Ω_Z, there exists $(z_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ and $d_Z^{\pm 1}$ (see Lemma 8.18) such that

$$w_i = \sum_{k=1}^n v_k \otimes z_{ki} \qquad d^{\pm 1} = d_{AB}^{\pm 1} \otimes d_Z^{\pm 1}.$$

Moreover, by definition of the cotensor product we have

$$\alpha(z_{ij}) = \sum_k a_{ik} \otimes z_{kj},$$
$$\alpha(d_Z^{\pm 1}) = d'^{\pm 1}_{AB} \otimes d_Z^{\pm 1},$$

where a_{ij} and $d'^{\pm 1}_{AB}$ denotes the generators of $\mathcal{G}(A,B)$.

Consider the bilinear map defined by the composition

$$\begin{array}{ccccc} a' : \Omega_Z(V_{AB}) \otimes \Omega_Z(V_{AB}) & \xrightarrow{\sim} & \Omega_Z(V_{AB} \otimes V_{AB}) & \xrightarrow{\Omega_Z(a)} & \Omega_Z(D_{AB}) \\ \| & & \| & & \| \\ (V_{AB}\square_{\mathcal{G}(A,B)}Z) \otimes (V_{AB}\square_{\mathcal{G}(A,B)}Z) & \xrightarrow{\sim} & (V_{AB} \otimes V_{AB})\square_{\mathcal{G}(A,B)}Z & \xrightarrow{a\otimes \mathrm{id}} & D_{AB}\square_{\mathcal{G}(A,B)}Z \end{array}$$

and let $C = (C_{ij})_{1\leq i,j\leq m}$ such that $a'(w_i \otimes w_j) = C_{ij}d$. Then we compute :

$$\begin{aligned} a'(w_i \otimes w_j) &= a'((\sum_{k=1}^{n} v_k \otimes z_{ki}) \otimes (\sum_{l=1}^{n} v_l \otimes z_{lj})) \\ &= \sum_{k,l} A_{kl} d_{AB} \otimes z_{ki} z_{lj} = C_{ij} d_{AB} \otimes d_Z \end{aligned}$$

or in matrix form

$$z^t A z = C d_Z.$$

In the same way, consider the map

$$\begin{tikzcd} b' : \Omega_Z(D_{AB}) \arrow[r, "\Omega_Z(b)"] \arrow[d, equal] & \Omega_Z(V_{AB} \otimes V_{AB}) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, equal] & \Omega_Z(V_{AB}) \otimes \Omega_Z(V_{AB}) \arrow[d, equal] \\ D_{AB} \square_{\mathcal{G}(A,B)} Z \arrow[r, "b \otimes \mathrm{id}"] & (V_{AB} \otimes V_{AB}) \square_{\mathcal{G}(A,B)} Z \arrow[r, "\psi"] & (V_{AB} \square_{\mathcal{G}(A,B)} Z) \otimes (V_{AB} \square_{\mathcal{G}(A,B)} Z) \end{tikzcd}$$

Let $D = (D_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}$ be defined by $b'(d) = \sum D_{ij} w_i \otimes w_j$.

Then we have :

$$\begin{aligned} \psi^{-1} \circ b'(d_{AB} \otimes d_Z) &= b \otimes \mathrm{id}(d_{AB} \otimes d_Z) \\ &= \sum_{i,j} B_{ij} v_i \otimes v_j \otimes d_Z \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \psi^{-1} \circ b'(d) &= \psi^{-1}(\sum_{ij} D_{ij} (\sum_{k} v_k \otimes z_k i) \otimes (\sum_{l} v_l \otimes z_{lj}) \\ &= \sum_{kl} \sum_{ij} v_k \otimes v_l \otimes D_{ij} z_{ki} z_{lj} \end{aligned}$$

so

$$z D z^t = B d_Z.$$

Hence we have an algebra morphism $f : \mathcal{G}(A, B|C, D) \to Z$ defined by $f(x) = z$ and $f(d^{\pm 1}) = d_Z^{\pm 1}$

We have to check that f is colinear. Since it is an algebra map, it is sufficient to check on the generators, which is trivial by the construction of respective coactions and by the definition of f. Then by Lemma 8.19, f is an isomorphism.

Finally, Schur's lemma gives the equality

$$(a \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes b) \circ (\mathrm{id} \otimes a) \circ (b \otimes \mathrm{id}) = \lambda \, \mathrm{id}_{D_{AB} \otimes V_{AB}} \ (\lambda \in k^*)$$

which may be rewritten in matrix form as

$$B^t A^t B A = \lambda I_n$$

Since the functor Ω_Z is k-linear, we have

$$(a' \otimes id) \circ (id \otimes b') \circ (id \otimes a') \circ (b' \otimes id) = \lambda \, \mathrm{id}_{\Omega_Z(D_{AB}) \otimes \Omega_Z(V_{AB})}$$

and then

$$D^t C^t D C = \lambda I_m$$

and we have $a \circ b = \mathrm{tr}(AB^t) \, \mathrm{id}_{D_{AB}}$, so, similarly, we have $\mathrm{tr}(AB^t) = \mathrm{tr}(CD^t)$. $\square$

Théorème 8.21. *Let $A, B \in GL_n(k)$ such that $B^tA^tBA = \lambda I_n$ and let $C_1, D_1 \in GL_{m_1}(k)$, $C_2, D_2 \in GL_{m_2}(k)$ such that the algebras $\mathcal{G}(A, B|C_1, D_1)$ and $\mathcal{G}(A, B|C_2, D_2)$ are $\mathcal{G}(A, B)$-Galois objects (n, m_1, and $m_2 \geq 2$). Then $\mathcal{G}(A, B|C_1, D_1)$ and $\mathcal{G}(A, B|C_2, D_2)$ are isomorphic (as Galois object) if and only if $m_1 = m_2 := m$ and there exists an invertible matrix $M \in GL_m(k)$ such that $(C_2, D_2) = (M^{-1t}C_1M^{-1}, MD_1M^t)$.*

Démonstration. We denote by Ω_i the fibre functor associated to $\mathcal{G}(A, B|C_i, D_i)$. Let $f : \mathcal{G}(A, B|C_1, D_1) \to \mathcal{G}(A, B|C_2, D_2)$ be a comodule algebra isomorphism : it induces an isomorphism $id \otimes f : \Omega_1(U_{AB}) \to \Omega_2(U_{AB})$. Using the same notation as above, we get two basis $(w_i^1)_{1\leq i\leq m_1}$ and $(w_i^2)_{1\leq i\leq m_2}$ of $\Omega_1(U_{AB})$ and $\Omega_2(U_{AB})$. In particular, we have $m_1 = m_2 := m$. Then there exists $M = (M_{ij}) \in GL_m(k)$ such that $id\otimes f(w_i^1) = \sum_k M_{ji}w_j^2$, and hence

$$\sum_k v_k \otimes f(z_{ki}^1) = \sum_k v_k \otimes z_{kj}^2 M_{ji}$$

which in matrix form gives $f(z^1) = z^2M$.

According to the relations defining $\mathcal{G}(A, B|C_1, D_1)$ we have

$$(z^1)^tAz^1 = C_1d \text{ and } z^1D_1(z^1)^t = Bd,$$

hence

$$f((z^1)^tAz^1) = M^t(z^2)^tAz^2M = M^tC_2Md = f(C_1d) = C_1d \text{ in } \mathcal{G}(A, B|C_1, D_1),$$

so $M^tC_2M = C_1$, and the second relation leads to

$$f(z^1D_1(z^1)^t) = z^2MD_1M^t(z^2)^t = f(Bd) = Bd = z^2D_2(z^2)^t$$

so $D_2 = MD_1M^t$.

Conversely, we already have $\mathcal{G}(A, B|C, D) \simeq \mathcal{G}(A, B|M^{-1t}CM^{-1}, MDM^t)$, see Proposition 8.7. □

According to the work of Schauenburg [55], the set of bi-Galois objects $\mathrm{BiGal}(L, H)$ is a groupoid with multiplication given by the cotensor product. In particular, when $H = L$, the set of isomorphism classes of H-H-bi-Galois objects inherits a structure of groups. Then, we have two group morphisms

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{Hopf}}(H) \to \mathrm{BiGal}(H),\ f \mapsto [H^f]$$

with kernel $\mathrm{CoInn}(H) := \{f \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Hopf}}(H); \exists\phi \in Alg(H, k) \text{ with } f = (\phi \circ S) \star \mathrm{id}_H \star\phi\}$ and we denote $\mathrm{CoOut}(H) := \mathrm{Aut}_{\mathrm{Hopf}}(H)/\mathrm{CoInn}(H)$; and

$$H_\ell^2(H) \to \mathrm{BiGal}(H),\ \sigma \mapsto [H(\sigma)]$$

where $H_\ell^2(H)$ denotes the lazy cohomology group of H, see [17]. From the monoidal categories viewpoint, it is the subgroup of $\mathrm{BiGal}(H)$ consisting of isomorphism classes of linear monoidal auto-equivalences of the category of A-comodules that are isomorphic, as functors, to the identity functor.

We assume until the end of the section that k has characteristic zero.

Lemme 8.22. *The automorphism group $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{G}(A, B))$ is isomorphic with the group*

$$\mathrm{G}_{(A,B)} = \left\{ P \in GL_n(k) \;\middle|\; \begin{array}{cc} & A = P^tAP, B = P^{-1}BP^{-1t} \\ or & A = P^tB^{-1}P, B = P^{-1}A^{-1}P^{-1t} \end{array} \right\} / \{\pm I_n\}.$$

Moreover, we have

$$\mathrm{CoInn}(\mathcal{G}(A,B)) \simeq \{P \in GL_n(k); A = P^tAP, B = P^{-1}BP^{-1t}\}/\{\pm I_n\}$$

and

$$\mathrm{CoOut}(\mathcal{G}(A,B)) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Démonstration. The first isomorphism comes from the proof of Theorem 8.3, and the assertion about CoInn is easy to verify. Finally, $\mathrm{CoOut}(\mathcal{G}(A,B)) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ because for any $f, g \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{G}(A,B)) \setminus \mathrm{CoInn}(\mathcal{G}(A,B))$, $f \circ g \in \mathrm{CoInn}(\mathcal{G}(A,B))$. □

Théorème 8.23. *For any $n \geq 2$ and $A, B \in GL_n(k)$ such that $B^tA^tBA = \lambda I_n$ ($\lambda \in k^*$),*

$$\mathrm{BiGal}(\mathcal{G}(A,B)) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Démonstration. Let Z be a $\mathcal{G}(A,B)$-$\mathcal{G}(A,B)$-bi-Galois object. By Theorem 8.20, there exists $m \geq 2$ and $C, D \in GL_m(k)$ verifying $D^tC^tDC = \lambda I_m$ and $\mathrm{tr}(AB^t) = \mathrm{tr}(CD^t)$ such that

$$Z \simeq \mathcal{G}(A,B|C,D)$$

as a $\mathcal{G}(A,B)$-Galois object. Since $\mathcal{G}(A,B|C,D)$ is also a $\mathcal{G}(A,B)$-$\mathcal{G}(C,D)$-bi-Galois object, the Hopf algebras $\mathcal{G}(A,B)$ and $\mathcal{G}(C,D)$ are isomorphic (by Théorème 3.7), so, by Theorem 8.3, $m = n$ and there exists $P \in GL_n(k)$ such that $(C,D) \in \{(P^tAP, P^{-1}BP^{-1t}), (P^tB^{-1}P, P^{-1}A^{-1}P^{-1t})\}$. Then we have either

$$Z \simeq \mathcal{G}(A,B|C,D) \simeq \mathcal{G}(A,B)$$

or

$$Z \simeq \mathcal{G}(A,B|C,D) \simeq \mathcal{G}(A,B|B^{-1},A^{-1})$$

as left Galois objects. Moreover, according to [55], Lemma 3.11, $\mathrm{CoOut}(\mathcal{G}(A,B))$ acts freely on $\mathrm{BiGal}(\mathcal{G}(A,B))$ by

$$f \in \mathrm{CoOut}(\mathcal{G}(A,B)),\ A \in \mathrm{BiGal}(\mathcal{G}(A,B))\ : f.A = A^f.$$

Then we have to check that

$$\mathcal{G}(A,B|B^{-1},A^{-1}) \simeq \mathcal{G}(A,B)^f$$

where $f \in \mathrm{CoOut}(\mathcal{G}(A,B))$ is non trivial. To do so, it is easy to verify that

$$\Omega_{\mathcal{G}(A,B|B^{-1},A^{-1})}(D_{AB}) \simeq D_{AB}^{-1} \simeq \Omega_{\mathcal{G}(A,B)^f}(D_{AB})$$

where Ω_Z denote the fiber functor induced by Z. Then by Lemma 8.15, the functors are isomorphic, and according to Ulbrich's work [63], the bi-Galois objects are isomorphic. □

Finally, from the interpretation of bi-Galois objects as functor, we get :

Théorème 8.24. *For any $n \geq 2$ and $A, B \in GL_n(k)$ such that $B^tA^tBA = \lambda I_n$ ($\lambda \in k^*$), $H^2_\ell(\mathcal{G}(A,B))$ is trivial.*

In particular, according to Théorème 4.3, $\mathcal{G}(A,B)$ has no non-trivial bi-cleft bi-Galois object.

8.6 Hopf $*$-algebras structure on $\mathcal{G}(A,B)$

In this section, $k = \mathbb{C}$. We classify CQG algebras which are $GL(2)$-deformations (or rather $U(2)$-deformations).

Let us recall that a Hopf $*$-algebra is a Hopf algebra H which is also a $*$-algebra and such that the comultiplication is a $*$-homomorphism. If $x = (x_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(H)$ is a matrix with coefficient in H, the matrix $(x^*_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ is denoted by $\overline{x}$, while $\overline{x}^t$, the transpose matrix of $\overline{x}$, is denoted by x^*. The matrix x is said to be unitary if $x^*x = I_n = xx^*$. Recall ([40]) that a Hopf $*$-algebra is said to be a CQG algebra if for every finite-dimensional H-comodule with associate matrix $x \in M_n(H)$, there exists $K \in GL_n(\mathbb{C})$ such that the matrix KxK^{-1} is unitary. CQG algebras correspond to Hopf algebras of representative functions on compact quantum groups.

We begin with a lemma which gives an example of CQG algebra structure on $\mathcal{G}(A,B)$.

Lemme 8.25. *Let $E \in GL_n(\mathbb{C})$ such that $\overline{E}^t E^t \overline{E} E = \lambda I_n$ for $\lambda \in \mathbb{C}$. Then $\lambda \in \mathbb{R}^*_+$ and the Hopf algebra $\mathcal{G}(E,\overline{E})$ is a CQG algebra for the following $*$-algebra structure :*

$$d^* = d^{-1} \text{ and } \overline{x} = E^t d^{-1} x E^{-1t}.$$

The CQG algebra $\mathcal{G}(E,\overline{E})$ will be denoted by $A_{\tilde{o}}(E)$.

Démonstration. First, notice that because of the relations defining $\mathcal{G}(E,\overline{E})$ and the condition on E, we also have $\overline{x} = \overline{E}^{-1t} x d^{-1} \overline{E}^t$. Then we can verify that our structure is well defined : for the first relation, we compute :

$$\begin{aligned}
\overline{E^{-1}x^tEx} &= ((\overline{Ex})^t(\overline{E^{-1}x^t})^t)^t \\
&= ((\overline{E}E^td^{-1}xE^{-1t})^t(\overline{E^{-1}}(\overline{E}^{-1t}xd^{-1}\overline{E}^t)^t)^t)^t \\
&= ((E^{-1}d^{-1}x^tE\overline{E}^t)(\overline{E}^{-1t}xd^{-1}\overline{E}^t\overline{E^{-1t}}))^t = d^{-1}
\end{aligned}$$

and for the second one we get :

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{E}^{-1}x\overline{E}x^t} &= ((E\overline{x}^t)^t(E^{-1}\overline{x})^t)^t \\
&= ((E(E^td^{-1}xE^{-1t})^t)^t(E^{-1}\overline{E}^{-1t}xd^{-1}\overline{E}^t)^t)^t \\
&= ((E^td^{-1}xE^{-1t}E^t)(\overline{E}x^td^{-1}\overline{E}^{-1}E^{-1t}))^t = d^{-1}.
\end{aligned}$$

Let us show that we have a $*$-structure and that x is unitary : first

$$\overline{\overline{x}} = \overline{E^td^{-1}xE^{-1t}} = \overline{E}^t\overline{x}d\overline{E}^{-1t} = \overline{E}^t\overline{E}^{-1t}xd^{-1}\overline{E}^td\overline{E}^{-1t} = x$$

and finally, we have

$$\begin{aligned}
x^* = \overline{x}^t &= (\overline{E}^{-1t}xd^{-1}\overline{E}^t)^t = \overline{E}x^td^{-1}\overline{E}^{-1} \\
&= (E^td^{-1}xE^{-1t})^t = E^{-1}d^{-1}x^tE,
\end{aligned}$$

so according to the relations defining $\mathcal{G}(E,\overline{E})$ we have $x^*x = xx^* = I_n$, $d^*d = dd^* = 1$ and, by [40], $\mathcal{G}(E,\overline{E})$ is CQG.

Finally, we have $\overline{E}^tE^t\overline{E}E = \lambda I_n = (E^tE^{t*})(EE^*)$, so $\lambda \in \mathbb{R}^*_+$. $\square$

The terminology $A_{\tilde{o}}(E)$ follows from the recent paper [10], where $\tilde{O}_n$ denotes the subgroup of $U_n(\mathbb{C})$ generated by $O_n(\mathbb{R})$ and $\mathbb{T}.I_n$.

As a special case of the lemma, we get the following result from [34] :

Corollaire 8.26. *The Hopf algebra $\mathcal{O}(GL_{q,\overline{q}}(2))$ is a CQG algebra, for the $*$-structure given by*

$$D^* = D^{-1} \text{ and } \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dD^{-1} & -qcD^{-1} \\ -q^{-1}bD^{-1} & aD^{-1} \end{pmatrix}.$$

In particular, for $q \in \mathbb{R}^*$, $\mathcal{O}(GL_q(2))$ is CQG.

We can state and prove the main theorem of this section :

Théorème 8.27. *The CQG algebras whose corepresentation semi-ring is isomorphic that of $U_2(\mathbb{C})$ are exactly the*

$$A_{\tilde{o}}(E)$$

where $E \in GL_n(\mathbb{C})$ $(n \geq 2)$ satisfies $\overline{E}^t E^t \overline{E} E = \lambda I_n$ for $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. First of all, the algebra $A_{\tilde{o}}(E)$ are indeed $U(2)$-deformations, according to the previous lemma and to Theorem 8.1.

Let H be a CQG algebra such that $\mathcal{R}^+(H) \simeq \mathcal{R}^+(\mathcal{O}(U(2))$. Let denote by d_H, d_H^{-1} and $x = (x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ $(2 \leq n)$ the matrix coefficients of $U_{(0,1)}, U_{(0,-1)}$ and $U_{(1,0)}$ respectively. Since H is a CQG algebra, we have $d_H^* = d_H^{-1}$ and we can assume that the matrix x is unitary. Lemma 8.15 and its proof gives us $\overline{U_{(1,0)}^H} \simeq U_{(1,-1)}^H \simeq U_{(0,-1)}^H \otimes U_{(1,0)}^H$, hence there exist $F, G \in GL_n(\mathbb{C})$ $(n = \dim_{\mathbb{C}} U_{(1,0)}^H)$ such that

$$x = F\overline{x}dF^{-1}, \quad x = Gd\overline{x}G^{-1} \text{ and } xx^* = I_n = x^*x$$

where $\overline{x} = (x_{ij}^*)_{1 \leq i,j \leq n}$ and $x^* = \overline{x}^t$. We have

$$x = \overline{\overline{x}} = \overline{G^{-1}}F^{-1}xF\overline{G},$$

hence we get

$$\overline{F}G = \nu I_n \text{ for some } \nu \in \mathbb{C}^*$$

and using the relations $xx^* = I_n = x^*x$ we get :

$$xF^tx^t = dF^t \text{ and } x^tG^{-1t}x = dG^{-1t}.$$

We put $E = \overline{F}^t$ and using the universal propertie of $A_{\tilde{o}}(E) = \mathcal{G}(E, \overline{E})$, we get a Hopf $*$-algebra morphism

$$f : A_{\tilde{o}}(E) \to H$$

such that

$$f(d) = d_H, \quad f(d^{-1}) = d_H^{-1}, \quad f(x) = x_H.$$

Since H is cosemisimple, the matrices F and G must satify $G^{-1t}F^tG^{-1}F = \mu I_n$ with $\mu \in \mathbb{C}^*$. Then E satisfies $\overline{E}^t E^t \overline{E} E = \lambda I_n = (E^t E^{t*})(EE^*)$ for $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. So we know from Theorem 8.1 that the corepresentation semi-ring of $A_{\tilde{o}}(E)$ is isomorphic to that of $U(2)$, hence f induces an isomorphism of semi-ring between $\mathcal{R}^+(A_{\tilde{o}}(E))$ and $\mathcal{R}^+(H)$. We conclude by Tannaka-Krein reconstruction techniques that $f : A_{\tilde{o}}(E) \to H$ is a Hopf $*$-algebra isomorphism.

□

8.7 Appendix : proof of Lemma 8.12

This section is devoted to the proof of Lemma 8.12. The strategy of our proof is to write a convenient presentation of the algebra $\mathcal{G}(A_q, A_q|C, D)$ so that we can apply the diamond lemma (Bergman, [11]) to get some linearly independent elements : this will imply that $\mathcal{G}(A_q, A_q|C, D)$ is non zero.

Recall that the algebras $\mathcal{G}(A, B|C, D)$ and $\mathcal{G}(P^tAP, P^{-1}BP^{-1t}|Q^tCQ, Q^{-1}DQ^{-1t})$ are isomorphic by Proposition 8.11. Combining this fact with the following well known lemma, and we can assume that $D_{mm} = 0$:

Lemme 8.28. *Let $M \in GL_n(k)$ $(n \geq 2)$. Then there exist a matrix $P \in GL_n(k)$ such that $(P^tMP)_{nn} = 0$.*

Let us now study in detail the algebra $\mathcal{M}(A_q, A_q|C, D)$: it is the universal algebra with generators x_{ij}, $1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq m$ and d, with relations

$$x^tA_qx = Cd \ \mathbf{(1)} \ , \quad xDx^t = A_qd \ \mathbf{(2)}$$

We can write these relations explicitly :

$x_{2i}x_{1j} = q^{-1}(x_{1i}x_{2j} - C_{ij}d),\ 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq m,$ **(1')**

$$\sum_{k,l=1}^{m} D_{kl}x_{1k}x_{2l} = d, \qquad \mathbf{(2')}$$

$$\sum_{k,l=1}^{m} D_{kl}x_{1k}x_{1l} = 0, \qquad \mathbf{(3')}$$

$$\sum_{k,l=1}^{m} D_{kl}x_{2k}x_{2l} = 0, \qquad \mathbf{(4')}$$

$$\sum_{k,l=1}^{m} D_{kl}x_{2k}x_{1l} = qd, \qquad \mathbf{(5')}$$

Using the fact that $\sum_{k,l=1}^{m} C_{kl}D_{kl} = 1 + q^2$, we see that relations **(1')** and **(2')** imply relation **(5')**. We will also need to get commutation relations between d and the x_{ij} : note that relation **(1)** and **(2)** imply

$$x^tdA_q^2 = CDdx^t, \qquad xdDC = A_q^2dx$$

which gives us

$$x_{1j}d = -q\sum_{k=1}^{m}(C^{-1}D^{-1})_{kj}dx_{1k},\ 1 \leq j \leq m$$

$$x_{2j}d = -q^{-1}\sum_{k=1}^{m}(CD)_{jk}dx_{2k},\ 1 \leq j \leq m$$

Let us order the set $\{1, 2\} \times \{1, \ldots, m\}$ lexicographically. Take (u, v) the maximal element such that $D_{uv} \neq 0$. Since the matrix D is invertible, we have $u = m$ and since $D_{mm} = 0$, we have $v < m$. We see now that $\mathcal{M}(A_q, A_q|C, D)$ is the universal algebra with generators $x_{1j}, 1 \leq j \leq m$, $x_{2j}, 1 \leq j \leq m$ and d, with relations

$$
\begin{cases}
x_{2i}x_{1j} = q^{-1}(x_{1i}x_{2j} - C_{ij}d) & \textbf{(1)} \\
x_{1m}x_{2v} = (D_{mv})^{-1}\big(d - \sum_{(kl)<(mv)} D_{kl}x_{1k}x_{2l}\big) & \textbf{(2)} \\
x_{1m}x_{1v} = -(D_{mv})^{-1}\big(\sum_{(kl)<(mv)} D_{kl}x_{1k}x_{1l}\big) & \textbf{(3)} \\
x_{2m}x_{2v} = -(D_{mv})^{-1}\big(\sum_{(kl)<(mv)} D_{kl}x_{2k}x_{2l}\big) & \textbf{(4)} \\
x_{1j}d = -q\sum_{k=1}^{m}(C^{-1}D^{-1})_{kj}dx_{1k} & \textbf{(5)} \\
x_{2j}d = -q^{-1}\sum_{k=1}^{m}(CD)_{jk}dx_{2k} & \textbf{(6)}
\end{cases}
$$

We now have a nice presentation to use the diamond lemma (Bergman [11]). We use the simplified exposition in the book Klimyk and Schmüdgen [40] and freely use the techniques and definitions involved. We endow the set $\{x_{ij}, (i,j) \in \{1,2\}\times\{1,\ldots,m\}\}$ with the order induced by the lexicographic order on the set $\{1,2\} \times \{1,\ldots,m\}$, we put $d < x_{ij}$ and we order the set of monomials according to their length, and finally two monomials of the same length are ordered lexicographically. It is clear that the presentation above is compatible with the order. Hence we have :

Lemme 8.29. *There are no inclusions ambiguities, and we have exactly the following overlap ambiguities :*

$$
\begin{array}{lll}
(x_{2i}x_{1m}, x_{1m}x_{1v}), & (x_{2i}x_{1m}, x_{1m}x_{2v}), & \forall 1 \leq i \leq m \\
(x_{1m}x_{2v}, x_{2v}x_{1j}), & (x_{2m}x_{2v}, x_{2v}x_{1j}), & \forall 1 \leq j \leq m \\
(x_{2i}x_{1j}, x_{1j}d) & & \forall 1 \leq i,j \leq m \\
(x_{1m}x_{2v}, x_{2v}d), & (x_{2m}x_{2v}, x_{2v}d) & \\
(x_{1m}x_{1v}, x_{1v}d) & &
\end{array}
$$

These ambiguities are resolvable.

Démonstration. Let us first note some identities :

$$
\begin{aligned}
&(CD)_{ij} = q^2(C^{-1}D^{-1})_{ji} \\
&\sum_{(kl)<(mv)} C_{kl}D_{kl} = 1 + q^2 - C_{mv}D_{mv} \\
&\sum_{(kl)<(mv)} D_{kl}C_{ik}dx_{il} = \sum_{k=1}^{m}(CD)_{il}dx_{il} - D_{mv}C_{im}dx_{iv}, \qquad \forall 1 \leq i \leq m \\
&\sum_{(kl)<(mv)} (C^{-1}D^{-1})_{jk}D_{kl}(CD)_{li} = D_{ji} - (C^{-1}D^{-1})_{jm}D_{mv}(CD)_{vi}, \quad \forall 1 \leq i,j \leq m
\end{aligned}
$$

Let us show that the ambiguity $(x_{2i}x_{1m}, x_{1m}x_{1v})$ is resolvable (the symbol "$\rightarrow$" means that we perform a reduction).

On the first hand we have :

$$q^{-1}(x_{1i}x_{2m}x_{1v}-C_{im}dx_{1v})$$
$$\to q^{-1}(q^{-1}(x_{1i}x_{1m}x_{2v}-C_{mv}x_{1i}d)-C_{im}dx_{1v})$$
$$\to q^{-1}(q^{-1}((D_{mv})^{-1}\big(x_{1i}d-\sum_{(kl)<(mv)}D_{kl}x_{1i}x_{1k}x_{2l}\big)-C_{mv}x_{1i}d)-C_{im}dx_{1v})$$
$$=-q^{-1}(D_{mv})^{-1}(q^{-1}(\big(-x_{1i}d+\sum_{(kl)<(mv)}D_{kl}x_{1i}x_{1k}x_{2l}\big)+D_{mv}C_{mu}x_{1i}d)+D_{mv}C_{im}dx_{1v})$$
$$=-q^{-1}(D_{mv})^{-1}(q^{-1}\sum_{(kl)<(mv)}D_{kl}x_{1i}x_{1k}x_{2l}-q^{-1}(1-D_{mv}C_{mv})x_{1i}d)+D_{mv}C_{im}dx_{1v})$$
$$\to-q^{-1}(D_{mv})^{-1}(q^{-1}\sum_{(kl)<(mv)}D_{kl}x_{1i}x_{1k}x_{2l}-q^{-2}(1-D_{mv}C_{mv})(\sum_{k=1}^{m}(CD)_{ik}dx_{1k}))+D_{mv}C_{im}dx_{1v})$$

On the other hand :

$$-(D_{mv})^{-1}\big(\sum_{(kl)<(mv)}D_{kl}x_{2i}x_{1k}x_{1l}\big)$$
$$\to-q^{-1}(D_{mv})^{-1}\big(\sum_{(kl)<(mv)}D_{kl}(x_{1i}x_{2k}-C_{ik}d)x_{1l}\big)$$
$$=-q^{-1}(D_{mv})^{-1}\big(\sum_{(kl)<(mv)}D_{kl}x_{1i}x_{2k}x_{1l}-\sum_{k=1}^{m}(CD)_{il}dx_{1l}+D_{mv}C_{im}dx_{1v}\big)$$
$$\to-q^{-1}(D_{mv})^{-1}\big(q^{-1}\sum_{(kl)<(mv)}D_{kl}x_{1i}(x_{1k}x_{2l}-C_{kl}d)-\sum_{k=1}^{m}(CD)_{il}dx_{1l}+D_{mv}C_{im}dx_{1v}\big)$$
$$=-q^{-1}(D_{mv})^{-1}\big(q^{-1}\sum_{(kl)<(mv)}D_{kl}x_{1i}x_{1k}x_{2l}-q^{-1}\sum_{(kl)<(mv)}D_{kl}C_{kl}x_{1i}d)$$
$$-\sum_{l=1}^{m}(CD)_{il}dx_{1l}+D_{mv}C_{im}dx_{1v}\big)$$
$$=-q^{-1}(D_{mv})^{-1}\big(q^{-1}\sum_{(kl)<(mv)}D_{kl}x_{1i}x_{1k}x_{2l}-q^{-1}(1+q^{2}-C_{mv}D_{mv})x_{1i}d)$$
$$-\sum_{l=1}^{m}(CD)_{il}dx_{1l}+D_{mv}C_{im}dx_{1v}\big)$$
$$\to-q^{-1}(D_{mv})^{-1}\big(q^{-1}\sum_{(kl)<(mv)}D_{kl}x_{1i}x_{1k}x_{2l}-q^{-1}(1+q^{2}-C_{mv}D_{mv})(-q\sum_{k=1}^{m}(C^{-1}D^{-1})_{ki}dx_{1k})$$
$$-\sum_{l=1}^{m}(CD)_{il}dx_{1l}+D_{mv}C_{im}dx_{1v}\big)$$
$$=-q^{-1}(D_{mv})^{-1}\big(q^{-1}\sum_{(kl)<(mu)}D_{kl}x_{1i}x_{1k}x_{2l}-q^{-2}(1+q^{2}-C_{mv}D_{mv})(\sum_{k=1}^{m}(CD)_{ik}dx_{1k})$$
$$-\sum_{k=1}^{m}(CD)_{il}dx_{1l}+D_{mv}C_{im}dx_{1v}\big)$$
$$=-q^{-1}(D_{mv})^{-1}\big(q^{-1}\sum_{(kl)<(mv)}D_{kl}x_{1i}x_{1k}x_{2l}-q^{-2}(1-C_{mv}D_{mv})(\sum_{k=1}^{m}(CD)_{ik}dx_{1k})+D_{mv}C_{im}dx_{1v}\big)$$

Similar computations show that the ambiguity $(x_{2m}x_{2v}, x_{2v}x_{1j})$ is resolvable, using the relations **(1)**, **(6)** and **(2)**.

Let us show that the ambiguity $(x_{1m}x_{2v}, x_{2v}x_{1j})$ is resolvable.

On the first hand we have :

$$
\begin{aligned}
&(D_{mv})^{-1}\big(dx_{1j} - \sum_{(kl)<(mv)} D_{kl}x_{1k}x_{2l}x_{1j}\big)\\
\to&(D_{mv})^{-1}\big(dx_{1j} - q^{-1}\sum_{(kl)<(mv)} D_{kl}x_{1k}(x_{1l}x_{2j} - C_{lj}d)\big)\\
=&(D_{mv})^{-1}\big(dx_{1j} - q^{-1}(\sum_{(kl)<(mv)} D_{kl}x_{1k}x_{1l}x_{2j} - \sum_{(kl)<(mv)} D_{kl}x_{1k}C_{lj}d)\big)\\
=&(D_{mv})^{-1}\big(dx_{1j} - q^{-1}(\sum_{(kl)<(mv)} D_{kl}x_{1k}x_{1l}x_{2j} - \sum_{(kl)<(mv)} D_{kl}C_{lj}x_{1k}d)\big)\\
=&(D_{mv})^{-1}\big(dx_{1j} - q^{-1}(\sum_{(kl)<(mv)} D_{kl}x_{1k}x_{1l}x_{2j} - \sum_{k=1}^{m}(DC)_{kj}x_{1k}d - D_{mv}C_{vj}x_{1m}d)\big)\\
\to&(D_{mv})^{-1}\big(dx_{1j} - q^{-1}(\sum_{(kl)<(mv)} D_{kl}x_{1k}x_{1l}x_{2j} + q\sum_{k,l=1}^{m}(DC)_{kj}(C^{-1}D^{-1})_{lj}dx_{1l} - D_{mv}C_{vj}x_{1m}d)\big)\\
=&(D_{mv})^{-1}\big(dx_{1j} - q^{-1}(\sum_{(kl)<(mv)} D_{kl}x_{1k}x_{1l}x_{2j} + qdx_{1j} - D_{mv}C_{vj}x_{1m}d)\big)\\
=&-q^{-1}(D_{mv})^{-1}\big(\sum_{(kl)<(mv)} D_{kl}x_{1k}x_{1l}x_{2j} + D_{mv}C_{vj}x_{1m}d\big)
\end{aligned}
$$

On the other hand we have :

$$
q^{-1}(x_{1m}x_{1v}x_{2j} - C_{vj}x_{1m}d) \to \quad -q^{-1}(D_{mv})^{-1}\big(\sum_{(kl)<(mv)} D_{kl}x_{1k}x_{1l}x_{2j} + D_{mv}C_{vj}x_{1m}d)\big)
$$

Similars computations shows that the ambiguity $(x_{2i}x_{1m}, x_{1m}x_{2v})$ is resolvable, using the relations **(4)** and **(1)**.

Let us show that the ambiguity $(x_{2i}x_{1j}, x_{1j}d)$ is resolvable.

On the first hand, we get :

$$
\begin{aligned}
&q^{-1}(x_{1i}x_{2j}d - C_{ij}d^2)\\
\to&q^{-1}(-q^{-1}\sum_{k=1}^{m}(CD)_{jk}x_{1i}dx_{2k} - C_{ij}d^2)\\
\to&q^{-1}(\sum_{k,l=1}^{m}(CD)_{jk}(C^{-1}D^{-1})_{li}dx_{1l}x_{2k} - C_{ij}d^2)
\end{aligned}
$$

and on the second hand :

$$- q\sum_{k=1}^{m}(C^{-1}D^{-1})_{kj}x_{2i}dx_{1k}$$

$$\to \sum_{k,l=1}^{m}(C^{-1}D^{-1})_{kj}(CD)_{il}dx_{2l}x_{1k}$$

$$\to q^{-1}\sum_{k,l=1}^{m}(C^{-1}D^{-1})_{kj}(CD)_{il}d(x_{1l}x_{2k} - C_{lk}d)$$

$$= q^{-1}(\sum_{k,l=1}^{m}(C^{-1}D^{-1})_{kj}(CD)_{il}dx_{1l}x_{2k} - \sum_{k,l=1}^{m}(CD)_{il}C_{lk}(C^{-1}D^{-1})_{kj}d^2)$$

$$= q^{-1}(\sum_{k,l=1}^{m}(C^{-1}D^{-1})_{kj}(CD)_{il}dx_{1l}x_{2k} - C_{ij}d^2)$$

$$= q^{-1}(\sum_{k,l=1}^{m}(CD)_{jk}(C^{-1}D^{-1})_{li}dx_{1l}x_{2k} - C_{ij}d^2)$$

Let us show that the ambiguity $(x_{1m}x_{2v}, x_{2v}d)$ is resolvable.
On the first hand we have :

$$(D_{mv})^{-1}\big(d^2 - \sum_{(kl)<(mv)} D_{kl}x_{1k}x_{2l}d\big)$$

$$\to (D_{mv})^{-1}\big(d^2 + q^{-1}\sum_{(kl)<(mv)}\sum_{j=1}^{m} D_{kl}(CD)_{lj}x_{1k}dx_{2j}\big)$$

$$\to (D_{mv})^{-1}\big(d^2 - \sum_{(kl)<(mv)}\sum_{i,j=1}^{m}(C^{-1}D^{-1})_{ik}D_{kl}(CD)_{lj}dx_{1i}x_{2j}\big)$$

$$= (D_{mv})^{-1}\big(d^2 - \sum_{i,j=1}^{m} D_{ij}dx_{1i}x_{2j}\big) + \sum_{i,j=1}^{m}(C^{-1}D^{-1})_{im}(CD)_{vj}dx_{1i}x_{2j}$$

$$\to \sum_{i,j=1}^{m}(C^{-1}D^{-1})_{im}(CD)_{vj}dx_{1i}x_{2j}$$

because

$$(D_{mv})^{-1}\big(d^2 - \sum_{i,j=1}^{m} D_{ij}dx_{1i}x_{2j}\big) = (D_{mv})^{-1}\big(d^2 - \sum_{(ij)<(mv)} D_{ij}dx_{1i}x_{2j} + D_{mv}dx_{1m}x_{2v}\big) \to 0$$

and on the second one, we have :

$$- q^{-1}\sum_{j=1}^{m}(CD)_{vj}x_{1m}dx_{2j}$$

$$\to \sum_{i,j=1}^{m}(CD)_{vj}(C^{-1}D^{-1})_{im}dx_{1i}x_{2j}$$

Let us show that the ambiguity $(x_{2m}x_{2v}, x_{2v}d)$ is resolvable.
On the first hand, we have :

$$-(D_{mv})^{-1}\big(\sum_{(kl)<(mv)} D_{kl}x_{2k}x_{2l}d\big)$$

$$\to q^{-2}(D_{mv})^{-1}\big(\sum_{(kl)<(mv)}\sum_{i,j=1}^{m}(CD)_{ki}D_{kl}(CD)_{lj}dx_{2i}x_{2j}\big)$$

$$=(D_{mv})^{-1}\big(\sum_{(kl)<(mv)}\sum_{i,j=1}^{m}(C^{-1}D^{-1})_{ik}D_{kl}(CD)_{lj}dx_{2i}x_{2j}\big)$$

$$=(D_{mv})^{-1}\big(\sum_{i,j=1}^{m}D_{ij}dx_{2i}x_{2j}\big)-\sum_{i,j=1}^{m}(C^{-1}D^{-1})_{im}(CD)_{vj}dx_{2i}x_{2j}$$

$$\to -\sum_{i,j=1}^{m}(C^{-1}D^{-1})_{im}(CD)_{vj}dx_{2i}x_{2j}$$

on the second hand :

$$-q^{-1}\sum_{j=1}^{m}(CD)_{vj}x_{2m}dx_{2j}$$

$$\to -q^{-2}\sum_{i,j=1}^{m}(CD)_{vj}(CD)_{mi}dx_{2i}x_{2m}$$

$$=-\sum_{i,j=1}^{m}(C^{-1}D^{-1})_{im}(CD)_{vj}dx_{2i}x_{2j}$$

Let us show that the ambiguity $(x_{1m}x_{1v}, x_{1v}d)$ is resolvable.
On the first hand, we get :

$$-(D_{mv})^{-1}\big(\sum_{(kl)<(mv)} D_{kl}x_{1k}x_{1l}d\big)$$

$$\to q(D_{mv})^{-1}\big(\sum_{(kl)<(mv)} D_{kl}(\sum_{j=1}^{m}(C^{-1}D^{-1})_{jl}x_{1k}dx_{1j})\big)$$

$$\to -q^{2}(D_{mv})^{-1}\big(\sum_{(kl)<(mv)} D_{kl}(\sum_{j=1}^{m}(C^{-1}D^{-1})_{jl}(\sum_{i=1}^{m}(C^{-1}D^{-1})_{ki}dx_{1i}x_{1j}))\big)$$

$$=-q^{2}(D_{mv})^{-1}\big(\sum_{(kl)<(mv)}\sum_{i,j=1}^{m}(C^{-1}D^{-1})_{ik}D_{kl}(C^{-1}D^{-1})_{jl}dx_{1i}x_{1j}\big)$$

$$=-(D_{mv})^{-1}\big(\sum_{(kl)<(mv)}\sum_{i,j=1}^{m}(C^{-1}D^{-1})_{ik}D_{kl}(CD)_{lj}dx_{1i}x_{1j}\big)$$

$$=-(D_{mv})^{-1}\sum_{i,j=1}^{m}D_{ij}dx_{1i}x_{1j}+\sum_{i,j=1}^{m}(C^{-1}D^{-1})_{im}(CD)_{vj}dx_{1i}x_{1j}$$

$$\to q^{2}\sum_{i,j=1}^{m}(C^{-1}D^{-1})_{im}(C^{-1}D^{-1})_{jv}dx_{1i}x_{1j}$$

because

$$\sum_{i,j=1}^{m}D_{ij}dx_{1i}x_{1j}=\sum_{(ij)<(mv)}D_{ij}dx_{1i}x_{1j}+D_{mv}dx_{1m}x_{1v}$$

on the second hand :

$$
\begin{aligned}
&- q\sum_{j=1}^{m}(C^{-1}D^{-1})_{jv}x_{1m}dx_{1j}\\
\to& q^2\sum_{i,j=1}^{m}(C^{-1}D^{-1})_{jv}(C^{-1}D^{-1})_{im}dx_{1i}dx_{1j}\\
=& q^2\sum_{i,j=1}^{m}(C^{-1}D^{-1})_{im}(C^{-1}D^{-1})_{jv}dx_{1i}dx_{1j}
\end{aligned}
$$

□

Using this result, we can apply the diamond lemma and state :

Corollaire 8.30. *The set of reduced monomials is a basis of $\mathcal{M}(A_q, A_q|C, D)$. In particular, the elements x_{ij} are linearly independent and the algebra $\mathcal{M}(A_q, A_q|C, D)$ is non zero.*

In order to complete the proof of Lemma 8.12, we would like to add an inverse to d, and a good way to do this would be to localize $\mathcal{M}(A_q, A_q|C, D)$ by the multiplicative set $S = \{d^n, n \in \mathbb{N}\}$. By the presentation, we already have $\mathcal{M}(A_q, A_q|C, D)S = S\mathcal{M}(A_q, A_q|C, D)$, and we need to know that d is not a zero divisor (see [24]).

Lemme 8.31. *$d \in \mathcal{M}(A_q, A_q|C, D)$ is not a zero divisor.*

Démonstration. According the above lemma, the set of reduced monomials (denoted by Φ) form a basis of $\mathcal{M}(A_q, A_q|C, D)$. A glance at the presentation show us that a reduced monomial is of the form

$$d^i x,\ i \in \mathbb{N},\ x \text{ a “good” product of } x_{ij},$$

and the important thing to note is that if M is a reduced monomial, so is dM. Finally, let $x = \sum_{M\in\Phi} \alpha_M M$ be an element of $\mathcal{M}(A_q, A_q|C, D)$ such that $dx = 0$. Then

$$dx = \sum_{M\in\Phi} \alpha_M dM = 0 \Rightarrow \alpha_M = 0,\ \forall \text{ M reduced monomial},$$

then $x = 0$. □

Corollaire 8.32. *$\mathcal{G}(A_q, A_q|C, D) = \mathcal{M}(A_q, A_q|C, D)/S$ is non zero.*

Troisième partie

Groupe quantique d'automorphismes et $SO(3)$-déformations

Chapitre 9

Résumé de l'article "Quantum automorphism group and $SO(3)$-deformations"

Dans ce chapitre, nous résumons l'article "Quantum automorphism group and $SO(3)$-deformations", disponible sur ArXiv et soumis pour publication à un journal à comité de lecture. Cet article, complet et en anglais, constitue le chapitre 10.

Dans cette section, nous montrons que tout groupe quantique compact ayant un semi-anneau de représentations isomorphe à celui de $SO(3)$ est le groupe quantique d'automorphismes d'une paire (A, φ), où A est une C^*-algèbre de dimension finie munie d'un état fidèle. De plus, nous étudions la catégorie des comodules du groupe quantique d'automorphismes de (A, φ) quand φ n'est pas nécessairement positive, généralisant ainsi quelques résultats connus, et nous examinons la possibilité de classifier les algèbres de Hopf cosemisimples (non nécessairement compactes) ayant un semi-anneau de représentations isomorphe à celui de $SO(3)$.

9.1 Préliminaires

Algèbres semisimples de dimension finie

Dans ce paragraphe, nous collectons quelques faits à propos des algèbres de dimension finie et introduisons diverses notations et définitions.

Définition 9.1. Soit A une algèbre. Une *mesure* sur A est une forme linéaire $\varphi : A \to \mathbb{C}$ telle que la forme bilinéaire induite $\varphi \circ m : A \otimes A \to \mathbb{C}$ est non dégénérée. Une *algèbre mesurée* est une paire (A, φ) où A est une algèbre et φ une mesure sur A.

Définition 9.2. Soient $0 < d_1 \leq \cdots \leq d_n$ des entiers positifs. On appelle *multimatrice* un élément $E = (E_1, \ldots, E_n) \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n} GL_{d_\lambda}(\mathbb{C})$. Si $\mathrm{tr}(-)$ est la trace usuelle, on note :

$$\mathrm{Tr}(E) := \sum_{\lambda=1}^{n} \mathrm{tr}(E_\lambda), \qquad \mathrm{tr}_E := \oplus\, \mathrm{tr}(E_\lambda^{-1t} -),$$
$$E^{-1} := (E_1^{-1}, \ldots, E_n^{-1}), \quad E^t := (E_1^t, \ldots, E_n^t),$$

et on dit que E est *positive* si chaque E_λ est positive.

Rappelons quelques résultats bien connus :

Lemme 9.3. *Soit A une C^*-algèbre de dimension finie. Il existe des entiers $0 < d_1 \leq \cdots \leq d_n$ tels que*

$$A \simeq \bigoplus_{\lambda=1}^{n} M_{d_\lambda}(\mathbb{C}).$$

Si $\varphi : A \to \mathbb{C}$ est une mesure, alors il existe une multimatrice $E = (E_1, \ldots, E_n) \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n} GL_{d_\lambda}(\mathbb{C})$ telle que $\varphi = \mathrm{tr}_E$, et φ est positive et fidèle si et seulement si E_λ est positive pour chaque $1 \leq \lambda \leq n$.

Notation 9.4. Pour une multimatrice $E \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n} GL_{d_\lambda}(\mathbb{C})$, on note A_E l'algèbre $\bigoplus_{\lambda=1}^{n} M_{d_\lambda}(\mathbb{C})$, et on note $(e_{ij,\lambda})_{(ij,\lambda)}$ sa base canonique.

Les définitions suivantes seront utiles :

Définition 9.5. Une multimatrice $E = (E_1, \ldots, E_n) \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n} GL_{d^E_\lambda}(\mathbb{C})$ est dite

1. *homogène* si $\mathrm{tr}(E_\lambda) = \mathrm{tr}(E_\mu) \neq 0$, pour tous $\lambda, \mu = 1, \ldots, n$,
2. *normalisée* si $\mathrm{Tr}(E^{-1}) = \mathrm{tr}(E_\lambda)$, pour tout $\lambda = 1, \ldots, n$,
3. *normalisable* s'il existe $\xi \in \mathbb{C}^*$ tel que $\mathrm{Tr}((\xi E)^{-1}) = \mathrm{tr}(\xi E_\lambda)$, pour tout $\lambda = 1, \ldots, n$.

Une mesure $\varphi = \mathrm{tr}_E$ et une algèbre mesurée (A, φ) sont dites *homogènes* (resp. *normalisées, normalisables*) si E est une multimatrice homogène (resp. normalisée, normalisable), et on dit qu'une C^*-algèbre mesurée (A, φ) est *homogène* (resp. *normalisée, normalisable*) si φ est homogène (resp. normalisée, normalisable) et positive.

Remarque 9.6.

1. Une multimatrice homogène E est normalisable si $\mathrm{Tr}(E^{-1}) \neq 0$.
2. Montrons comment calculer ces deux quantités : soit $(A, \varphi) = (A_E, \mathrm{tr}_E)$ une algèbre de dimension finie, semisimple, mesurée, où $E \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n} GL_{d^E_\lambda}(\mathbb{C})$. Alors, on a :
   - $\mathrm{tr}_E(1_A) = \mathrm{Tr}(E^{-1})$,
   - soit $\tilde{\delta} : \mathbb{C} \to A \otimes A$ l'application linéaire telle que

   $$\tilde{\delta}(1) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{k,l,r=1}^{d^E_\lambda} E_{lr,\lambda} e_{kl,\lambda} \otimes e_{rk,\lambda}.$$

   Alors $\tilde{\delta}$ est l'application duale à l'application bilinéaire $\mathrm{tr}_E \circ m : A \otimes A \to \mathbb{C}$, et l'application composée suivante

   $$A \xrightarrow{\mathrm{id}_A \otimes \tilde{\delta}} A \otimes A \otimes A \xrightarrow{m \otimes \mathrm{id}_A} A \otimes A \xrightarrow{m} A \xrightarrow{\mathrm{tr}_E} \mathbb{C},\ e_{kl,\lambda} \mapsto \mathrm{tr}(E_\lambda) E^{-1}_{kl,\lambda}$$

   coïncide avec tr_E à un scalaire non-nul près si et seulement si E est homogène.

Le groupe quantique d'automorphismes $A_{\mathbf{aut}}(A, \varphi)$

Nous pouvons maintenant rappeler la construction du groupe quantique d'automorphismes $A_{\mathbf{aut}}(A, \varphi)$ d'une algèbre de dimension finie, semisimple et mesurée, d'après Wang, voir [66].

Proposition 9.7. *Soit $(A,\varphi)=(A_E,\mathrm{tr}_E)$ une algèbre de dimension finie, semisimple et mesurée, et soit $(e_{ij,\lambda})_{(ij,\lambda)}$ sa base canonique. Le groupe quantique d'automorphismes $A_{\boldsymbol{aut}}(A,\varphi)$ est défini comme suit. Comme algèbre, $A_{\boldsymbol{aut}}(A,\varphi)$ est l'algèbre universelle engendrée par les générateurs $X_{kl,\mu}^{ij,\lambda}$ ($1\leq\lambda,\mu\leq n$, $1\leq i,j\leq d_\lambda$, $1\leq k,l\leq d_\mu$) soumis aux relations*

$$\sum_{q=1}^{d_\nu} X_{ij,\lambda}^{rq,\nu}X_{kl,\mu}^{qs,\nu}=\delta_{\lambda\mu}\delta_{jk}X_{il,\mu}^{rs,\nu}, \qquad \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{k=1}^{d_\mu} X_{kk,\mu}^{ij,\lambda}=\delta_{ij},$$

$$\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{k,l=1}^{d_\mu} E_{kl,\mu}^{-1}X_{ij,\lambda}^{kl,\mu}=E_{ij,\lambda}^{-1}, \qquad \sum_{r,s=1}^{d_\lambda} E_{rs,\lambda}X_{ir,\lambda}^{kp,\mu}X_{sj,\lambda}^{ql,\nu}=\delta_{\mu\nu}E_{pq,\mu}X_{ij,\lambda}^{kl,\mu}.$$

Elle possède une structure d'algèbre de Hopf donnée par

$$\Delta(X_{ij,\lambda}^{kl,\mu})=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{p,q=1}^{d_\nu} X_{pq,\nu}^{kl,\mu}\otimes X_{ij,\lambda}^{pq,\nu},\ \varepsilon(X_{ij,\lambda}^{kl,\mu})=\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{\lambda\mu}, S(X_{ij,\lambda}^{kl,\mu})=\sum_{r=1}^{d_\lambda}\sum_{s=1}^{d_\mu} E_{rj,\lambda}^{-1}E_{ls,\mu}X_{sk,\mu}^{ri,\lambda},$$

et le morphisme d'algèbres $\alpha_A : A\to A\otimes A_{\boldsymbol{aut}}(A,\varphi)$ défini par

$$\alpha_A(e_{ij,\lambda})=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{p,q=1}^{d_\mu} e_{pq,\mu}\otimes X_{ij,\lambda}^{pq,\mu}$$

est une coaction sur A telle que φ est équivariante.

Si (H,α) est une algèbre de Hopf coagissant sur (A,φ) avec un morphisme d'algèbres $\alpha:(A,\varphi)\to(A,\varphi)\otimes H$, alors il existe un morphisme d'algèbres de Hopf $f: A_{\boldsymbol{aut}}(A,\varphi)\to H$ tel que $(f\otimes\mathrm{id}_A)\circ\alpha_A=\alpha$.

Si de plus E est positive, $A_{\boldsymbol{aut}}(A,\varphi)$ est une algèbre de Hopf compacte pour la $*$-structure

$$(X_{kl,\mu}^{ij,\lambda})^*=X_{lk,\mu}^{ji,\lambda}.$$

Alors α_A est un $*$-morphisme et si H est une algèbre de Hopf compacte, f est aussi un $*$-morphisme.

Exemple 9.8.

1. Soit $(A,\varphi)=(M_2(\mathbb{C}),\mathrm{tr})$. Alors $A_{\mathbf{aut}}(A,\varphi)\simeq\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C}))\simeq\mathcal{O}(SO_3(\mathbb{C}))$. Voir [6, 19].
2. Soient $q\in\mathbb{C}^*$ et $F_q:=\begin{pmatrix} q^{-1} & 0\\ 0 & q\end{pmatrix}$. Notons $\mathrm{tr}_q:=\mathrm{tr}_{F_q}$. Alors on a $A_{\mathbf{aut}}(M_2(\mathbb{C}),\mathrm{tr}_q)\simeq\mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3))$.

Remarque 9.9.

1. Soit (A_E,tr_E) une algèbre de dimension finie, semisimple et mesurée, et notons $E=(E_1,\dots,E_{\lambda_0},\dots,E_n)$. On a un morphisme surjectif d'algèbres de Hopf

$$A_{\mathbf{aut}}(A_E,\mathrm{tr}_E)\to A_{\mathbf{aut}}(A_{E_{\lambda_0}},\mathrm{tr}_{E_{\lambda_0}})$$

donné par

$$X_{kl,\mu}^{ij,\lambda}\mapsto\begin{cases}\delta_{\lambda\mu}X_{kl}^{ij} & \text{si } \lambda=\lambda_0,\\ \delta_{\lambda\mu}\delta_{ik}\delta_{jl} & \text{sinon.}\end{cases}$$

2. D'après les relations définissant $A_{\mathbf{aut}}(A_E, \mathrm{tr}_E)$, on a $A_{\mathbf{aut}}(A_E, \mathrm{tr}_E) = A_{\mathbf{aut}}(A_{\xi E}, \mathrm{tr}_{\xi E})$ pour tout $\xi \in \mathbb{C}^*$. Donc si $E \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n} GL_{d_\lambda^E}(\mathbb{C})$ est normalisable, alors il existe une multimatrice normalisée $F \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n} GL_{d_\lambda^E}(\mathbb{C})$ telle que $A_E = A_F$ et $A_{\mathbf{aut}}(A_E, \mathrm{tr}_E) = A_{\mathbf{aut}}(A_F, \mathrm{tr}_F)$.

9.2 $SO(3)$-déformations : le cas compact

Décrivons le semi-anneau $\mathcal{R}^+(\mathcal{O}(SO(3)))$: il existe une famille $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de comodules simples, non-isomorphes deux à deux, tels que :

$$W_0 = \mathbb{C}, \quad W_n \otimes W_1 \simeq W_1 \otimes W_n \simeq W_{n-1} \oplus W_n \oplus W_{n+1}, \quad \dim(W_n) = 2n+1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Dans ce paragraphe, nous utilisons le lemme de Schur pour étudier les règles de fusion de $SO(3)$ et reconstruire une C^*-algèbre mesurée associée à une $SO(3)$-déformation compacte. À cause de la technicité des différentes démonstrations, il nous semble éclairant de décrire l'exemple de $\mathcal{O}(SO(3)) \simeq A_{\mathbf{aut}}(M_2(\mathbb{C}), \mathrm{tr})$, suivant la proposition 3.2 dans [19], qui motive les lemmes 9.12 et 9.13 et le théorème 9.14 ci-dessous.

Exemple 9.10. Considérons $(A, \varphi) = (M_2(\mathbb{C}), \mathrm{tr})$ et la base quaternionique de A

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces éléments satisfont les relations suivantes :

$$e_k^2 = -e_0,\ 1 \le k \le 3, \quad e_1e_2 = e_3, \quad e_2e_3 = e_1, \quad e_3e_1 = e_2.$$

Introduisons quelques notations : pour $1 \le k \ne l \le 3$, $\langle kl \rangle \in \{1,2,3\}$ est tel que $\{k,l\} \cup \{\langle kl \rangle\} = \{1,2,3\}$, et soit $\varepsilon_{kl} \in \{\pm 1\}$ tel que $e_k e_l = \varepsilon_{kl} e_{\langle kl \rangle}$.

$\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de $\ker(\mathrm{tr})$ qu'on identifie au comodule fondamental $W = W_1$ dans $\mathcal{R}^+(\mathcal{O}(SO(3)))$, et on a la décomposition

$$M_2(\mathbb{C}) = \mathbb{C}.e_0 \oplus W.$$

Définissons les applications colinéaires suivantes :

$$\begin{aligned}
&e : W \otimes W \to \mathbb{C}, && e(e_k \otimes e_l) = -2\ \delta_{kl}, \\
&e^* : \mathbb{C} \to W \otimes W, && e^*(1) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} e_k \otimes e_k, \\
&C : W \otimes W \to W, && C(e_k \otimes e_l) = (1-\delta_{kl})\varepsilon_{kl} e_{\langle kl \rangle}, \\
&D : W \to W \otimes W, && D(e_k) = \sum_{p \ne k} \varepsilon_{kp} e_{\langle kp \rangle} \otimes e_p.
\end{aligned}$$

Ces applications satisfont les relations décrites dans le lemme 9.12, avec $\tau = 3$ et $R = 1$, et la multiplication dans $M_2(\mathbb{C}) = \mathbb{C}.e_0 \oplus W$ se décompose en

$$m(A \otimes B) = \frac{1}{2} e(A \otimes B) e_0 + C(A \otimes B) \quad \forall\ A, B \in W.$$

Cette situation est essentiellement due au lemme de Schur et à la décomposition de $W \otimes W$ dans $\mathcal{R}^+(\mathcal{O}(SO(3)))$, et reste vraie dans le cas général, comme le montrent les lemmes 9.12 et 9.13 ci-après. Pour les démontrer, on utilisera l'estimation suivante.

Lemme 9.11. *Soit $F \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $F\overline{F} = \pm I_n$. Alors $\operatorname{tr}(FF^*) > 2$.*

La disponibilité de ce lemme constitue la principale différence entre le cas compact et le cas général. Il est utilisé de façon cruciale dans la démonstration du lemme suivant (qui permet de reconstruire une algèbre à partir des règles de fusion de $SO(3)$).

Lemme 9.12. *Soit H une $SO(3)$-déformation compacte, de comodule fondamental (W, α) muni d'un produit scalaire H-invariant. Alors il existe des morphismes de H-comodules*

$$e : W \otimes W \to \mathbb{C}, \qquad C : W \otimes W \to W$$

et des scalaires $\tau > 2$, $R \in \{\pm 1\}$ vérifiant les relations de compatibilité suivantes (où $e^* : \mathbb{C} \to W \otimes W$ est l'adjoint de e et $D := (\mathrm{id}_W \otimes C)(e^* \otimes \mathrm{id}_W) : W \to W \otimes W$) :

$$\begin{aligned}
(e \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes e^*) &= R\,\mathrm{id}_W & (\mathrm{id}_W \otimes e)(e^* \otimes \mathrm{id}_W) &= R\,\mathrm{id}_W \\
CD &= \mathrm{id}_W & ee^* &= \tau\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \\
Ce^* &= 0 & eD &= 0 \\
e(C \otimes \mathrm{id}_W) &= e(\mathrm{id}_W \otimes C) & (\mathrm{id}_W \otimes C)(e^* \otimes \mathrm{id}_W) &= (C \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes e^*) \\
(\mathrm{id}_W \otimes D)e^* &= (D \otimes \mathrm{id}_W)e^* & (\mathrm{id}_W \otimes e)(D \otimes \mathrm{id}_W) &= (e \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes D)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id}_W \otimes C)(D \otimes \mathrm{id}_W) = (C \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes D) &= R(R-\tau)^{-1}\,\mathrm{id}_{W^{\otimes 2}} + (\tau - R)^{-1} e^* e + DC \\
(\mathrm{id}_W \otimes D)D &= R(R-\tau)^{-1}(e^* \otimes \mathrm{id}_W) + R(\tau - R)^{-1}(\mathrm{id}_W \otimes e^*) + (D \otimes \mathrm{id}_W)D \\
C(\mathrm{id}_W \otimes C) &= (R-\tau)^{-1}(\mathrm{id}_W \otimes e) + (\tau - R)^{-1}(e \otimes \mathrm{id}_W) + C(C \otimes \mathrm{id}_W)
\end{aligned}$$

Le lemme suivant permettra de définir une structure de C^*-algèbre sur $A = \mathbb{C} \oplus W$.

Lemme 9.13. *Soit H une $SO(3)$-déformation compacte, de comodule fondamental (W, α). Alors $R = 1$ et il existe une application antilinéaire $* : W \to W$ telle que :*

$$\begin{aligned}
&w^{**} = w, && \forall v \in W, \\
&e(v^* \otimes w^*) = \overline{e(w \otimes v)}, && \forall v, w \in W, \\
&e(w \otimes w^*) > 0, && \forall w \in W - \{0\}, \\
&C(v^* \otimes w^*) = C(w \otimes v)^*, && \forall v, w \in W.
\end{aligned}$$

Les ingrédients des démonstrations sont l'étude de la décomposition

$$W \otimes W \simeq \mathbb{C} \oplus W \oplus W_2^H$$

grâce au lemme de Schur et à la réciprocité de Frobenius. On renvoie au chapitre 10 pour les démonstrations complètes.

Munis de ces deux lemmes, nous pouvons prouver le théorème suivant :

Théorème 9.14. *Soit H une algèbre de Hopf compacte ayant un semi-anneau de représentations isomorphe à celui de $SO(3)$. Alors il existe une C^*-algèbre de dimension finie, mesurée et homogène, (A, φ), avec $\dim A \geq 4$, telle que $H \simeq A_{\boldsymbol{aut}}(A, \varphi)$.*

Idées de la démonstration du théorème 9.14. Soit H une algèbre de Hopf compacte ayant un semi-anneau de représentations isomorphe à celui de $SO(3)$. On note $(W_n^H)_{n\in\mathbb{N}}$ sa famille de comodules simples et on note $W := W_1^H$ son comodule fondamental, avec α'_W la coaction associée.

Commençons par définir une C^*-algèbre (A, φ) de dimension finie mesurée, munie d'une H-coaction. Soit A le H-comodule $\mathbb{C}\oplus W$, $\dim A \geq 4$. Munissons A des applications suivantes : soit $m : A \otimes A \to A$, $u : \mathbb{C} \to A$ et $\varphi : A \to \mathbb{C}$ les applications H-colinéaires définies par

$$\begin{aligned}
m(\lambda \otimes \mu) &= \lambda\mu, && \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C},\\
m(\lambda \otimes v) &= m(v \otimes \lambda) = \lambda v, && \forall \lambda \in \mathbb{C},\ v \in W,\\
m(v \otimes w) &= \big((\tau - 1)^{-1} e(v \otimes w), C(v \otimes w)\big), && \forall v, w \in W,\\
u(1) &= (1, 0) := 1_A, &&\\
\varphi(\lambda, v) &= \lambda, && \forall \lambda \in \mathbb{C},\ v \in W,
\end{aligned}$$

et soit $* : A \to A$ l'application antilinéaire définie par :

$$(\lambda, v)^* = (\overline{\lambda}, v^*)$$

où $* : W \to W$ est l'application antilinéaire donnée par le lemme 9.13. D'après les lemmes 9.12 et 9.13, A est une $*$-algèbre de dimension finie munie d'un état fidèle, et est donc une C^*-algèbre. Il existe une multimatrice positive $E \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n} GL_{d_\lambda^E}(\mathbb{C})$ telle que $(A, \varphi) \simeq (A_E, \mathrm{tr}_E)$. Par construction des applications de structure, A est une $*$-algèbre H-comodule telle que φ est équivariante, donc par universalité, il existe un morphisme de $*$-algèbres de Hopf $f : A_{\mathbf{aut}}(A, \varphi) \to H$ tel que $(\mathrm{id}_W \otimes f) \circ \alpha_A = \alpha'_A$. Finalement, $W = \ker(\varphi)$ est un $A_{\mathbf{aut}}(A, \varphi)$-sous-comodule de A, et par définition des coactions sur A, on a $(\mathrm{id}_W \otimes f) \circ \alpha_W = \alpha'_W$.

En utilisant la remarque 9.6, on peut calculer les quantités $\mathrm{Tr}(E^{-1})$ et $\mathrm{tr}(E_\lambda)$ et voir que (A, φ) est normalisable.

Pour résumer, il existe une C^*-algèbre mesurée homogène (A, φ) et un morphisme d'$*$-algèbres de Hopf $f : A_{\mathbf{aut}}(A, \varphi) \to H$ tel que $W \subset A$ est un $A_{\mathbf{aut}}(A, \varphi)$-sous-comodule et $(\mathrm{id}_W \otimes f) \circ \alpha_W = \alpha'_W$, où α_W est la coaction sur W de $A_{\mathbf{aut}}(A, \varphi)$. D'après [6, 7], $A_{\mathbf{aut}}(A, \varphi)$ est une $SO(3)$-déformation compacte et on écrit $(W_n^A)_{n\in\mathbb{N}}$ sa famille de comodules simples. Alors on a $f_*(W_1^A) \simeq W_1^H$, et par récurrence, on a $f_*(W_n^A) \simeq W_n^H$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc, d'après le lemme 2.25, f est un isomorphisme d'$*$-algèbres de Hopf et $H \simeq A_{\mathbf{aut}}(A, \varphi)$. $\square$

9.3 Théorie des représentations du groupe quantique d'automorphismes

Le but de cette section est d'étudier la catégorie des comodules du groupe quantique d'automorphismes d'une algèbre munie d'une mesure non-nécessairement positive. Pour cela, nous définissons le cogroupoïde suivant :

Soient $E \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n_E} GL_{d_\lambda^E}(\mathbb{C})$ et $F \in \bigoplus_{\mu=1}^{n_F} GL_{d_\mu^F}(\mathbb{C})$ des multimatrices. Notons $d_E := d_{n_E}^E$ et $d_F := d_{n_F}^F$. L'algèbre $\mathcal{A}(E, F)$ est l'algèbre universelle engendrée par les générateurs $X_{kl,\mu}^{ij,\lambda}$

($1 \leq \lambda \leq n_E$, $1 \leq i,j \leq d^E_\lambda$, $1 \leq \mu \leq n_F$, $1 \leq k,l \leq d^F_\mu$) soumis aux relations

$$\sum_{q=1}^{d^E_\nu} X^{rq,\nu}_{ij,\lambda} X^{qs,\nu}_{kl,\mu} = \delta_{\lambda\mu}\delta_{jk} X^{rs,\nu}_{il,\mu}, \qquad \sum_{\mu=1}^{n_F}\sum_{k=1}^{d^F_\mu} X^{ij,\lambda}_{kk,\mu} = \delta_{ij},$$

$$\sum_{\mu=1}^{n_E}\sum_{k,l=1}^{d^E_\mu} E^{-1}_{kl,\mu} X^{kl,\mu}_{ij,\lambda} = F^{-1}_{ij,\lambda}, \qquad \sum_{r,s=1}^{d^F_\mu} F_{rs,\mu} X^{ip,\lambda}_{kr,\mu} X^{qj,\nu}_{sl,\mu} = \delta_{\lambda\nu} E_{pq,\lambda} X^{ij,\lambda}_{kl,\mu}.$$

En particulier, on a $\mathcal{A}(E,E) = A_{\mathbf{aut}}(A_E, \mathrm{tr}_E)$ comme algèbre.

On a le lemme suivant :

Lemme 9.15. *Pour toutes multimatrices* $E \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n_E} GL_{d^E_\lambda}(\mathbb{C})$, $F \in \bigoplus_{\mu=1}^{n_F} GL_{d^F_\mu}(\mathbb{C})$ *et* $G \in \bigoplus_{\nu=1}^{n_G} GL_{d^G_\nu}(\mathbb{C})$, *il existe des morphismes d'algèbres*

$$\Delta^G_{E,F} : \mathcal{A}(E,F) \to \mathcal{A}(E,G) \otimes \mathcal{A}(G,F)$$

défini par $\Delta^G_{E,F}(X^{ij,\lambda}_{kl,\mu}) = \sum_{\nu=1}^{n_G}\sum_{r,s=1}^{d^G_\nu} X^{ij,\lambda}_{rs,\nu} \otimes X^{rs,\nu}_{kl,\mu}$ *(*$1 \leq \lambda \leq n_E$, $1 \leq i,j \leq d^E_\lambda$, $1 \leq \mu \leq n_F$, $1 \leq k,l \leq d^F_\mu$*),*

$$\varepsilon_E : \mathcal{A}(E) \to \mathbb{C}$$

défini par $\varepsilon_E(X^{ij,\lambda}_{kl,\mu}) = \delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{\lambda\mu}$ *(*$1 \leq \lambda,\mu \leq n_E$, $1 \leq i,j \leq d^E_\lambda$, $1 \leq k,l \leq d^E_\mu$*) et*

$$S_{E,F} : \mathcal{A}(E,F) \to \mathcal{A}(F,E)^{op}$$

défini par $S_{E,F}(X^{ij,\lambda}_{kl,\mu}) = \sum_{r=1}^{d^E_\lambda}\sum_{s=1}^{d^F_\mu} E_{jr,\lambda} F^{-1}_{sl,\mu} X^{sk,\mu}_{ri,\lambda}$ *(*$1 \leq \lambda \leq n_E$, $1 \leq i,j \leq d^E_\lambda$, $1 \leq \mu \leq n_F$, $1 \leq k,l \leq d^F_\mu$*) satisfaisant les relations de définition d'un cogroupoïde.*

La démonstration de l'existence utilise la propriété universelle des algèbres $\mathcal{A}(E,F)$ et la compatibilité se vérifie directement sur les générateurs. Ce lemme permet la définition suivante :

Définition 9.16. Le cogroupoïde $\mathcal{A}$ est défini comme suit :

1. $\mathrm{Ob}(\mathcal{A}) = \{E \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n} GL_{d^E_\lambda}(\mathbb{C});\ d_E > 1\}$,
2. pour $E, F \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, l'algèbre $\mathcal{A}(E,F)$ est l'algèbre définie ci-dessus,
3. les applications de structure $\Delta^{\bullet}_{\bullet,\bullet}$, $\varepsilon_\bullet$, et $S_{\bullet,\bullet}$ sont données dans le lemme précédent.

Nous devons maintenant étudier la connexité de ce cogroupoïde. On commence par le lemme technique suivant, qui se prouve en utilisant le lemme du diamant.

Lemme 9.17. *Soient* E, $F \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ *telles que* $\mathrm{Tr}(E^{-1}) = \mathrm{Tr}(F^{-1})$ *et* $\mathrm{tr}(E_\lambda) = \mathrm{tr}(F_\mu)$ *pour tout* λ, μ. *Alors l'algèbre* $\mathcal{A}(E,F)$ *est non-nulle.*

On peut de plus montrer le résultat suivant :

Théorème 9.18. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Alors les algèbres de Hopf* $A_{\boldsymbol{aut}}(\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^4)$ *et* $A_{\boldsymbol{aut}}(\mathbb{C}^n \oplus (M_2(\mathbb{C}), \mathrm{tr}))$ *sont des déformations par 2-cocycle l'une de l'autre. En particulier, elles ont des catégories de comodules monoïdalement équivalentes.*

En utilisant le théorème de Schauenburg, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 9.19. *Soit (A_E, tr_E) une algèbre de dimension finie, semisimple et mesurée, telle que $\dim A_E \geq 4$, où $E \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n} GL_{d_\lambda^E}(\mathbb{C})$ est une multimatrice normalisable. Alors il existe $q \in \mathbb{C}^*$ et une équivalence de catégories monoïdalse $\mathbb{C}$-linéaires*

$$\mathrm{Comod}(A_{\boldsymbol{aut}}(A_E, \mathrm{tr}_E)) \simeq^{\otimes} \mathrm{Comod}(\mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3)))$$

entre les catégories de comodules de $A_{\boldsymbol{aut}}(A_E, \mathrm{tr}_E)$ et $\mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3))$ respectivement. Si E est normalisée, $q \in \mathbb{C}^*$ vérifie $q^2 - \mathrm{Tr}(E^{-1})q + 1 = 0$.

9.4 $SO(3)$-déformations : le cas général

La théorie des représentations de $SO_{q^{1/2}}(3)$

Du fait que $\mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3))$ est une sous-algèbre de Hopf de $\mathcal{O}(SL_q(2))$, on peut déduire de la théorie de représentations de $SL_q(2)$ celle de $SO_{q^{1/2}}(3)$. On obtient une description du semi-anneau de représentations $\mathcal{R}^+(\mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3)))$, aussi bien dans le cas cosemisimple que dans le cas où $q \in \mathbb{C}^*$ est une racine de l'unité.

Théorème 9.20. *Soit $q \in \mathbb{C}^*$. On dit que q est générique si q n'est pas une racine de l'unité ou si $q \in \{\pm 1\}$. Si q n'est pas générique, soit $N \geq 3$ l'ordre de q et soit*

$$N_0 = \begin{cases} N & \text{si } N \text{ est impair,} \\ N/2 & \text{si } N \text{ est pair.} \end{cases}$$

- *Supposons d'abord que q est générique. Alors $\mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3))$ est cosemisimple et il existe une famille de comodules simples deux-à-deux non-isomorphes $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que :*

  $$W_0 = \mathbb{C}, \quad W_n \otimes W_1 \simeq W_1 \otimes W_n \simeq W_{n-1} \oplus W_n \oplus W_{n+1}, \quad \dim(W_n) = 2n+1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

  De plus, tout $\mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3))$-comodule simple est isomorphe à l'un des comodules W_n.
- *Supposons maintenant que q n'est pas générique et que $N_0 = 2N_1$, $N_1 \in \mathbb{N}^*$. Alors $\mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3))$ n'est pas cosemisimple. Il existe des familles $\{V_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, $\{W_n,\ n = 0, \dots, N_1 - 1\}$ de comodules simples non-isomorphes (hormis pour $n = 0$ où $V_0 = W_0 = \mathbb{C}$), tels que*

  $$V_n \otimes V_1 \simeq V_1 \otimes V_n \simeq V_{n-1} \oplus V_{n+1}, \quad \dim V_n = n+1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

  $$W_n \otimes W_1 \simeq W_1 \otimes W_n \simeq W_{n-1} \oplus W_n \oplus W_{n+1}, \quad \dim W_n = 2n+1,\ \forall n = 1, \dots, N_1 - 1.$$

  Le comodule $W_{N_1-1} \otimes W_1$ n'est pas semisimple. Il possède une filtration simple

  $$(0) \subset W_{N_1-2} \oplus W_{N_1-1} \subset Y \subset W_{N_1-1} \otimes W_1$$

  avec $W_{N_1-1} \otimes W_1 / Y \simeq W_{N_1-1}$ et $Y/(W_{N_1-2} \oplus W_{N_1-1}) \simeq V_1$.
  Les comodules $W_n \otimes V_m \simeq V_m \otimes W_n$ ($m \in \mathbb{N}$ et $n = 0, \dots, N_1 - 1$) sont simples et tout $\mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3))$-comodule simple est isomorphe à l'un d'eux.

– *Finalement, supposons que q ne soit pas générique et que $N_0 = 2N_1 - 1$, $N_1 \in \mathbb{N}^*$. Alors $\mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3))$ n'est pas cosemisimple. Il existe des familles $\{V_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, $\{U_n,\ n = 0, \ldots, N_0-1\}$ d'espaces vectoriels (de dimension $\dim V_n = \dim U_n = n+1$) tels que les familles $\{V_{2n},\ n \in \mathbb{N}\}$, $\{U_{2n},\ n = 0, \ldots, N_1 - 1\}$ et $\{V_{2n+1} \otimes U_{2m+1},\ n \in \mathbb{N},\ m = 0, \ldots, N_1 - 1\}$ soient des $\mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3))$-comodules simples non-isomorphes (hormis pour $n = 0$ où $V_0 = U_0 = \mathbb{C}$). Ils satisfont les règles de fusion induites par :*

$$V_n \otimes V_1 \simeq V_1 \otimes V_n \simeq V_{n-1} \oplus V_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$U_n \otimes U_1 \simeq U_1 \otimes U_n \simeq U_{n-1} \oplus U_{n+1}\ \forall n = 1, \ldots, N_0 - 1.$$

Le comodule $U_{2(N_1-1)} \otimes U_2$ n'est pas simple. Il possède une filtration simple

$$(0) \subset U_{2(N_1-2)} \subset Y \subset U_{2(N_1-1)} \otimes U_2$$

où $U_{2(N_1-1)} \otimes U_2/Y \simeq U_{2(N_1-2)}$ et $Y/U_{2(N_1-2)} \simeq U_1 \otimes V_1$. Les comodules $V_n \otimes U_m \simeq U_m \otimes V_n$ (avec $n \equiv m (\mathrm{mod}\, 2)$) sont simples, et tout $\mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3))$-comodule simple est isomorphe à l'un d'eux.

Le cas général

En utilisant la même démonstration que celle du lemme 9.12, mais sans pouvoir utiliser l'estimation 9.11, on obtient le lemme suivant.

Lemme 9.21. *Soit H une $SO(3)$-déformation de comodule fondamental (W, α). Alors il existe des morphismes de H-comodules*

$$\begin{aligned} e &: W \otimes W \to \mathbb{C} & \delta &: \mathbb{C} \to W \otimes W \\ C &: W \otimes W \to W & D &: W \to W \otimes W, \end{aligned}$$

un nombre complexe $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^3 = 1$ et un unique scalaire non-nul $\tau \in \mathbb{C}^*$ satisfaisant les relations de compatibilité suivantes :

$$(e \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes \delta) = \mathrm{id}_W \qquad (\mathrm{id}_W \otimes e)(\delta \otimes \mathrm{id}_W) = \mathrm{id}_W$$

$$D = (\mathrm{id}_W \otimes C)(\delta \otimes \mathrm{id}_W)$$

$$CD = \mathrm{id}_W \qquad e\delta = \tau\, \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$$

$$C\delta = 0 \qquad eD = 0$$

$$(\mathrm{id}_W \otimes C)(\delta \otimes \mathrm{id}_W) = \omega(C \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes \delta) \qquad e(C \otimes \mathrm{id}_W) = \omega e(\mathrm{id}_W \otimes C)$$

$$(\mathrm{id}_W \otimes e)(D \otimes \mathrm{id}_W) = \omega(e \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes D) \qquad (\mathrm{id}_W \otimes D)\delta = \omega(D \otimes \mathrm{id}_W)\delta$$

De plus, si $\omega \neq 1$, on a $\tau = 2$, et si $\omega = 1$, on a $\tau \neq 1$ et

$$\begin{aligned} (\mathrm{id}_W \otimes C)(D \otimes \mathrm{id}_W) = (C \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes D) &= (1-\tau)^{-1} \mathrm{id}_{W^{\otimes 2}} + (\tau - 1)^{-1}\delta e + DC \\ (\mathrm{id}_W \otimes D)D &= (1-\tau)^{-1}(\delta \otimes \mathrm{id}_W) + (\tau - 1)^{-1}(\mathrm{id}_W \otimes \delta) + (D \otimes \mathrm{id}_W)D \\ C(\mathrm{id}_W \otimes C) &= (1-\tau)^{-1}(\mathrm{id}_W \otimes e) + (\tau - 1)^{-1}(e \otimes \mathrm{id}_W) + C(C \otimes \mathrm{id}_W) \end{aligned}$$

Nous sommes donc amenés à considérer deux sous-familles de $SO(3)$-déformations.

Notation 9.22. Soit H une $SO(3)$-déformation. On dit que H est de type $\mathbf{I}_\tau$ si $\omega = 1$, où $\tau \in \mathbb{C}^*$ est uniquement déterminé par H d'après le lemme 9.21. Sinon, on dit que H est de type **II** (dans ce cas, on a toujours $\tau = 2$).

Dans le cas compact, le lemme 9.11 permet de dire que toute $SO(3)$-déformation compacte est de type $\mathbf{I}_\tau$, avec $\tau \neq \pm 1$. Ici, dans le cas $\mathbf{I}_\tau$, on peut toujours démontrer l'existence d'une algèbre mesurée (A, φ) telle que H soit un quotient de $A_{\mathbf{aut}}(A, \varphi)$, et on a le résultat suivant :

Théorème 9.23. *Soit H une $SO(3)$-déformation de type $\mathbf{I}_\tau$ telle que $\tau \neq -1$. Alors il existe une algèbre de dimension finie, semisimple et mesurée (A, φ) telle que* $\dim(A) \geq 4$ *et un isomorphisme d'algèbres de Hopf $H \simeq A_{\mathbf{aut}}(A, \varphi)$.*

Chapitre 10

Quantum automorphism groups and $SO(3)$-deformations ([48])

We show that any compact quantum group having the same fusion rules as the ones of $SO(3)$ is the quantum automorphism group of a pair (A, φ), where A is a finite dimensional C^*-algebra endowed with a homogeneous faithful state. We also study the representation category of the quantum automorphism group of (A, φ) when φ is not necessarily positive, generalizing some known results, and we discuss the possibility of classifying the cosemisimple (not necessarily compact) Hopf algebras whose corepresentation semi-ring is isomorphic to that of $SO(3)$.

10.1 Introduction and main results

The quantum automorphism group of a measured finite dimensional C^*-algebra (A, φ) (i.e. a finite-dimensional C^*-algebra A endowed with a faithful state φ) has been defined by Wang in [66] as the universal object in the category of compact quantum groups acting on (A, φ). The corresponding compact Hopf algebra is denoted by $A_{\mathbf{aut}}(A, \varphi)$.

The structure of $A_{\mathbf{aut}}(A, \varphi)$ depends on the choice of the measure φ, and the representation theory of this quantum group is now well understood [6, 7], provided a good choice of φ has been done, namely that φ is a δ-form (we shall say here that φ is homogeneous, and that (A, φ) is a homogeneous measured C^*-algebra). Banica's main result in [6, 7] is that if φ is homogeneous and $\dim(A) \geq 4$, then $A_{\mathbf{aut}}(A, \varphi)$ has the same corepresentation semi-ring as $SO(3)$. See also [20]. The result can be further extended to show that the corepresentation category of $A_{\mathbf{aut}}(A, \varphi)$ is monoidally equivalent to the representation category of a quantum $SO(3)$-group at a well chosen parameter, see [22].

Then a natural question, going back to [6, 7] and formally asked in [8], is whether any compact quantum group with the same fusion rules as $SO(3)$ is the quantum automorphism group of an appropriate measured finite-dimensional C^*-algebra. The main result in this paper is a positive answer to this question.

Théorème 10.1. *Let H be a compact Hopf algebra with corepresentation semi-ring isomorphic to that of $SO(3)$. Then there exists a finite dimensional homogeneous measured C^*-algebra (A, φ) with $\dim(A) \geq 4$ such that $H \simeq A_{\mathbf{aut}}(A, \varphi)$.*

Recall that if G is a reductive algebraic group, a G-deformation is a cosemisimple Hopf algebra H such that $\mathcal{R}^+(H) \simeq \mathcal{R}^+(\mathcal{O}(G))$, where $\mathcal{R}^+$ denotes the corepresentation semi-ring. The problem of the classification of G-deformations has been already studied for several algebraic groups : see [70, 3, 53, 13] for $SL(2)$, [51, 47] for $GL(2)$, and [50] for $SL(3)$. Thus Theorem 10.1 provides the full description of the compact $SO(3)$-deformations.

The next natural step is then to study the non-compact $SO(3)$-deformations. For this purpose we study the comodule category of $A_{\mathbf{aut}}(A,\varphi)$ with φ non necessarily positive and give a generalization of the results from [6, 7, 14, 22] (together with independent proof of these results), as follows (see Section 2 for the relevant definitions).

Théorème 10.2. *Let (A,φ) be a finite dimensional, semisimple algebra endowed with a normalizable measure φ, with $\dim A \geq 4$. Then there exists a $\mathbb{C}$-linear equivalence of monoidal categories*

$$\mathrm{Comod}(A_{\boldsymbol{aut}}(A,\varphi)) \simeq^{\otimes} \mathrm{Comod}(\mathcal{O}(SO_q(3)))$$

between the comodule categories of $A_{\boldsymbol{aut}}(A,\varphi)$ and $\mathcal{O}(SO_q(3))$ respectively, for some well-chosen $q \in \mathbb{C}^*$.

We have not been able to show that all $SO(3)$-deformations arise as quantum automorphism groups as in the previous theorem. However see Section 5 for partial results in this direction. Note that the monoidal reconstruction theorem of Tuba-Wenzl [61] in type B does not indicate clearly that quantum $SO(3)$-deformations all should be quantum automorphism groups.

This paper is organized as follows : in Sec. 2, we fix some notations and definitions, state some basic facts about compact Hopf algebras, finite dimensional algebras and we recall the construction of the quantum automorphism group of a finite dimensional, semisimple, measured algebra. Theorem 10.1 is proved in Sec. 3, thanks to a careful study of the fusion rules of $SO(3)$. In Sec. 4, we prove Theorem 10.2 by building a cogroupoid linking these Hopf algebras and studying its connectedness and in Sec. 5, we prove some classification results about Hopf algebras having a corepresentation semi-ring isomorphic to that of $SO(3)$.

10.2 Preliminaries

Compact Hopf algebras

Let us recall the definition of a compact Hopf algebra (see [40]) :

Définition 10.3.

1. A Hopf $*$-algebra is a Hopf algebra H which is also a $*$-algebra and such that the comultiplication is a $*$-homomorphism.
2. If $x = (x_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(H)$ is a matrix with coefficient in H, the matrix $(x_{ij}^*)_{1\leq i,j\leq n}$ is denoted by $\overline{x}$, while $\overline{x}^t$, the transpose matrix of $\overline{x}$, is denoted by x^*. The matrix x is said to be unitary if $x^*x = I_n = xx^*$.
3. A Hopf $*$-algebra is said to be a compact Hopf algebra if for every finite-dimensional H-comodule with associated multiplicative matrix of coefficients $x \in M_n(H)$, there exists $K \in GL_n(\mathbb{C})$ such that the matrix KxK^{-1} is unitary.

Compact Hopf algebras correspond to Hopf algebras of representative functions on compact quantum groups. In this paper, we only consider compact quantum groups at the level of compact Hopf algebras.

Finite dimensional semisimple algebras

In this section, we collect some facts about finite dimensional algebras and introduce some convenient notations and definitions.

Définition 10.4. Let A be an algebra. A *measure* on A is a linear form $\varphi : A \to \mathbb{C}$ such that the induced bilinear form $\varphi \circ m : A \otimes A \to \mathbb{C}$ is non degenerate. A *measured algebra* is a pair (A, φ) where A is an algebra and φ is a measure on A.

Définition 10.5. Let $0 < d_1 \leq \cdots \leq d_n$ be some nonzero positive integers. We call a *multimatrix* an element $E = (E_1, \ldots, E_n) \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n} GL_{d_\lambda}(\mathbb{C})$. If $\mathrm{tr}(-)$ is the usual trace, we denote :

$$\mathrm{Tr}(E) := \sum_{\lambda=1}^{n} \mathrm{tr}(E_\lambda), \qquad \mathrm{tr}_E := \oplus\, \mathrm{tr}(E_\lambda^{-1t} -)$$
$$E^{-1} := (E_1^{-1}, \ldots, E_n^{-1}), \quad E^t := (E_1^t, \ldots, E_n^t)$$

and we say that E is *positive* if each E_λ is positive.

Let us recall some well known results.

Lemme 10.6. *Let A be a finite dimensional C^*-algebra. Then there exist some nonzero positive integers $0 < d_1 \leq \cdots \leq d_n$ such that*

$$A \simeq \bigoplus_{\lambda=1}^{n} M_{d_\lambda}(\mathbb{C}).$$

If $\varphi : A \to \mathbb{C}$ is a measure, then there exists a multimatrix $E = (E_1, \ldots, E_n) \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n} GL_{d_\lambda}(\mathbb{C})$ such that $\varphi = \mathrm{tr}_E$, and φ is positive and faithful if and only if E_λ is positive for all $1 \leq \lambda \leq n$.

Notation 10.7. For a multimatrix $E \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n} GL_{d_\lambda}(\mathbb{C})$, we denote by A_E the algebra $\bigoplus_{\lambda=1}^{n} M_{d_\lambda}(\mathbb{C})$, and we denote by $(e_{kl,\lambda})_{kl,\lambda}$ its canonical basis.

The following definition will be useful :

Définition 10.8. A multimatrix $E = (E_1, \ldots, E_n) \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n} GL_{d_\lambda^E}(\mathbb{C})$ is said to be

1. *homogeneous* if $\mathrm{tr}(E_\lambda) = \mathrm{tr}(E_\mu) \neq 0$, for all $\lambda, \mu = 1, \ldots, n$,
2. *normalized* if $\mathrm{Tr}(E^{-1}) = \mathrm{tr}(E_\lambda)$, for all $\lambda = 1, \ldots, n$,
3. *normalizable* if there exists $\xi \in \mathbb{C}^*$ such that $\mathrm{Tr}((\xi E)^{-1}) = \mathrm{tr}(\xi E_\lambda)$, for all $\lambda = 1, \ldots, n$.

A measure $\varphi = \mathrm{tr}_E$ and a measured algebra (A, φ) are said to be homogeneous (resp. normalized, normalizable) if E is a homogeneous (resp. normalized, normalizable) multimatrix, and we say that a measured C^*-algebra (A, φ) is homogeneous (resp. normalized, normalizable) if φ is homogeneous (resp. normalized, normalizable) and positive.

Exemple 10.9. The canonical trace used by Banica in [6] is homogeneous, as well as the δ-forms from [7].

Remarque 10.10.

1. A homogeneous multimatrix E is normalizable if $\mathrm{Tr}(E^{-1}) \neq 0$.
2. Let us show how appear those quantities : let $(A,\varphi) = (A_E, \mathrm{tr}_E)$, be a finite dimensional semisimple, measured algebra, where $E \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n} GL_{d_\lambda^E}(\mathbb{C})$. Then we have :
   - $\mathrm{tr}_E(1_A) = \mathrm{Tr}(E^{-1})$
   - Let $\tilde{\delta} : \mathbb{C} \to A \otimes A$ be the linear map defined by

   $$\tilde{\delta}(1) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{k,l,r=1}^{d_\lambda^E} E_{lr,\lambda} e_{kl,\lambda} \otimes e_{rk,\lambda}.$$

   Then $\tilde{\delta}$ is the dual map induced by the bilinear map $\mathrm{tr}_E \circ m : A \otimes A \to \mathbb{C}$, and the following composition

   $$A \overset{\mathrm{id}_A \otimes \tilde{\delta}}{\longrightarrow} A \otimes A \otimes A \overset{m \otimes \mathrm{id}_A}{\longrightarrow} A \otimes A \overset{m}{\longrightarrow} A \overset{\mathrm{tr}_E}{\longrightarrow} \mathbb{C},\ e_{kl,\lambda} \mapsto \mathrm{tr}(E_\lambda) E^{-1}_{kl,\lambda}$$

   coincides with tr_E up to a nonzero scalar if and only if E is homogeneous.

10.3 The quantum automorphism group $A_{\mathbf{aut}}(A,\varphi)$

We can now recall the construction of the quantum automorphism group $A_{\mathbf{aut}}(A,\varphi)$ for a finite dimensional, semisimple, measured algebra (A,φ) from [66].

Proposition 10.11. *Let $(A,\varphi) = (A_E, \mathrm{tr}_E)$ be a finite dimensional, semisimple, measured algebra and let $(e_{ij,\lambda})_{(ij,\lambda)}$ be its canonical basis. The quantum automorphism group $A_{\mathbf{aut}}(A,\varphi)$ is defined as follows. As an algebra, $A_{\mathbf{aut}}(A,\varphi)$ is the universal algebra with generators $X^{ij,\lambda}_{kl,\mu}$ ($1 \leq \lambda, \mu \leq n$, $1 \leq i,j \leq d_\lambda$, $1 \leq k,l \leq d_\mu$) submitted to the relations*

$$\sum_{q=1}^{d_\nu} X^{rq,\nu}_{ij,\lambda} X^{qs,\nu}_{kl,\mu} = \delta_{\lambda\mu}\delta_{jk} X^{rs,\nu}_{il,\mu}, \qquad \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{k=1}^{d_\mu} X^{ij,\lambda}_{kk,\mu} = \delta_{ij},$$

$$\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{k,l=1}^{d_\mu} E^{-1}_{kl,\mu} X^{kl,\mu}_{ij,\lambda} = E^{-1}_{ij,\lambda}, \qquad \sum_{r,s=1}^{d_\lambda} E_{rs,\lambda} X^{kp,\mu}_{ir,\lambda} X^{ql,\nu}_{sj,\lambda} = \delta_{\mu\nu} E_{pq,\mu} X^{kl,\mu}_{ij,\lambda}.$$

It has a natural Hopf algebra structure given by

$$\Delta(X^{kl,\mu}_{ij,\lambda}) = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{p,q=1}^{d_\nu} X^{kl,\mu}_{pq,\nu} \otimes X^{pq,\nu}_{ij,\lambda},\ \varepsilon(X^{kl,\mu}_{ij,\lambda}) = \delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{\lambda\mu},\ S(X^{kl,\mu}_{ij,\lambda}) = \sum_{r=1}^{d_\lambda}\sum_{s=1}^{d_\mu} E^{-1}_{rj,\lambda} E_{ls,\mu} X^{ri,\lambda}_{sk,\mu}$$

and the algebra map $\alpha_A : A \to A \otimes A_{\mathbf{aut}}(A,\varphi)$ defined by

$$\alpha_A(e_{ij,\lambda}) = \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{p,q=1}^{d_\mu} e_{pq,\mu} \otimes X^{pq,\mu}_{ij,\lambda}$$

is a coaction on A such that φ is equivariant.

If (H,α) is a Hopf algebra coacting on (A,φ) with an algebra morphism $\alpha : (A,\varphi) \to (A,\varphi) \otimes H$, then there exists a Hopf algebra morphism $f : A_{\mathbf{aut}}(A,\varphi) \to H$ such that $(f \otimes \mathrm{id}_A) \circ \alpha_A = \alpha$.

If moreover E is positive, $A_{\boldsymbol{aut}}(A,\varphi)$ is a compact Hopf algebra for the $*$-structure

$$(X^{ij,\lambda}_{kl,\mu})^* = X^{ji,\lambda}_{lk,\mu}.$$

Then α_A is a $*$-morphism and if H is a compact Hopf algebra, f is also a $*$-morphism.

Exemple 10.12.

1. If X_n is the set consisting of n distinct points and ψ is the uniform probability measure on X_n, then $A_{\mathbf{aut}}(C(X_n),\psi)$ is the quantum permutation group on n points, see [66].
2. Let $(A,\varphi) = (M_2(\mathbb{C}),\mathrm{tr})$. Then $A_{\mathbf{aut}}(A,\varphi) \simeq \mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) \simeq \mathcal{O}(SO_3(\mathbb{C}))$. See [6, 19].
3. Let $q \in \mathbb{C}^*$ and $F_q := \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$. Denote $\mathrm{tr}_q := \mathrm{tr}_{F_q}$. Then we have $A_{\mathbf{aut}}(M_2(\mathbb{C}),\mathrm{tr}_q) \simeq \mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3))$.

Remarque 10.13.

1. Let (A_E,tr_E) be a finite dimensional, semisimple, measured algebra, where $E = (E_1,\dots,E_{\lambda_0},\dots,E_n)$. Then we have a Hopf algebra surjection

$$A_{\mathbf{aut}}(A_E,\mathrm{tr}_E) \to A_{\mathbf{aut}}(A_{E_{\lambda_0}},\mathrm{tr}_{E_{\lambda_0}})$$

given by

$$X^{ij,\lambda}_{kl,\mu} \mapsto \begin{cases} \delta_{\lambda\mu}X^{ij}_{kl} & \text{when } \lambda=\lambda_0, \\ \delta_{\lambda\mu}\delta_{ik}\delta_{jl} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

2. In view of the relations defining $A_{\mathbf{aut}}(A_E,\mathrm{tr}_E)$, we have $A_{\mathbf{aut}}(A_E,\mathrm{tr}_E) = A_{\mathbf{aut}}(A_{\xi E},\mathrm{tr}_{\xi E})$ for all $\xi \in \mathbb{C}^*$. Then if $E \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n} GL_{d^E_\lambda}(\mathbb{C})$ is normalizable, there exists $F \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n} GL_{d^E_\lambda}(\mathbb{C})$ normalized such that $A_E = A_F$ and $A_{\mathbf{aut}}(A_E,\mathrm{tr}_E) = A_{\mathbf{aut}}(A_F,\mathrm{tr}_F)$.

According to the properties of the trace, we have the following result :

Proposition 10.14. *Let $E, P \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n} GL_{d_\lambda}(\mathbb{C})$ be some multimatrices. Then $A_E = A_{PEP^{-1}}$ and we have a Hopf algebra isomorphism*

$$A_{\boldsymbol{aut}}(A_E,\mathrm{tr}_E) \simeq A_{\boldsymbol{aut}}(A_E,\mathrm{tr}_{PEP^{-1}}).$$

Démonstration. The first assertion is obvious, and the rest follows from the universal property of the quantum automorphism group, with respect to the base change induced by the linear map $M \mapsto P^tMP^{-1t}$ and the fact that $\mathrm{tr}_E(P^tMP^{-1t}) = \mathrm{tr}_{PEP^{-1}}(M)$. □

10.4 $SO(3)$-deformation : the compact case

This section is devoted to the proof of Theorem 10.1 which classifies compact $SO(3)$-deformations.

Let us describe the fusion semi-ring $\mathcal{R}^+(\mathcal{O}(SO(3)))$: there exists a family of non-isomorphic simple comodules $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ such that :

$$W_0 = \mathbb{C}, \quad W_n \otimes W_1 \simeq W_1 \otimes W_n \simeq W_{n-1} \oplus W_n \oplus W_{n+1}, \quad \dim(W_n) = 2n+1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

In the next few lemmas, we will use Schur's lemma in order to study the fusion rules of $SO(3)$ and to reconstruct a measured C^*-algebra associated to a compact $SO(3)$-deformation. The different proofs being slightly technical, it seems useful to describe the example of $\mathcal{O}(SO(3)) \simeq A_{\mathbf{aut}}(M_2(\mathbb{C}), \mathrm{tr})$, following Proposition 3.2 in [19], which motivate the Lemmas 10.17 and 10.18 below and Theorem 10.1.

Exemple 10.15. Consider $(A, \varphi) = (M_2(\mathbb{C}), \mathrm{tr})$ and the linear basis of A consisting of the unit quaternions

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

These satisfy the following multiplication rules :

$$e_k^2 = -e_0, \ 1 \leq k \leq 3, \quad e_1 e_2 = e_3, \quad e_2 e_3 = e_1, \quad e_3 e_1 = e_2.$$

We introduce some notations : for $1 \leq k \neq l \leq 3$, $\langle kl \rangle \in \{1, 2, 3\}$ is such that $\{k, l\} \cup \{\langle kl \rangle\} = \{1, 2, 3\}$, and let $\varepsilon_{kl} \in \{\pm 1\}$ be such that $e_k e_l = \varepsilon_{kl} e_{\langle kl \rangle}$. In particular, $\varepsilon_{kl} = -\varepsilon_{lk}$.

$\{e_1, e_2, e_3\}$ is a basis of $\ker(\mathrm{tr})$ which can be identified with the simple comodule $W = W_1$ in $\mathcal{R}^+(\mathcal{O}(SO(3)))$, and we have the decomposition

$$M_2(\mathbb{C}) = \mathbb{C}.e_0 \oplus W.$$

Define the following colinear maps :

$$\begin{aligned}
e &: W \otimes W \to \mathbb{C}, & e(e_k \otimes e_l) &= -2\ \delta_{kl}, \\
e^* &: \mathbb{C} \to W \otimes W, & e^*(1) &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} e_k \otimes e_k, \\
C &: W \otimes W \to W, & C(e_k \otimes e_l) &= (1 - \delta_{kl}) \varepsilon_{kl} e_{\langle kl \rangle}, \\
D &: W \to W \otimes W, & D(e_k) &= \sum_{p \neq k} \varepsilon_{kp} e_{\langle kp \rangle} \otimes e_p.
\end{aligned}$$

This maps satisfy some (compatibility) relations which are described in the following Lemma 10.17, with $\tau = 3$ and $R = 1$, and the multiplication in $M_2(\mathbb{C}) = \mathbb{C}.e_0 \oplus W$ decompose into

$$m(A \otimes B) = \frac{1}{2} e(A \otimes B) e_0 + C(A \otimes B) \quad \forall\ A, B \in W.$$

The rigidity provided by Schur's lemma and the fusion rules of $W \otimes W$ will allow us to see that this situation essentially holds in the general case.

We begin by a lemma :

Lemme 10.16. *Let $F \in M_n(\mathbb{C})$, $n \geq 3$, be such that $F\overline{F} = \pm I_n$. Then* $\mathrm{tr}(FF^*) > 2$.

Démonstration. First assume that $F\overline{F} = I_n$. Then according to [18] p.724, there exists a unitary matrix $U \in M_n(\mathbb{C})$ and some real numbers $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_k < 1$ such that

$$U^t F U = \begin{pmatrix} 0 & D(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) & 0 \\ D(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2k} \end{pmatrix}$$

where $D(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ denotes the diagonal matrix with the λ_i along the diagonal. In that case,

$$\operatorname{tr}(FF^*) = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i^2 + \lambda_i^{-2}) + n - 2k > 2.$$

Now assume that $F\overline{F} = -I_n$. Then according to [18] p.724, $4 \leq n$ is even and there exists a unitary matrix $u \in U_n(\mathbb{C})$ and some real numbers $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{n/2} \leq 1$ such that

$$U^t F U = \begin{pmatrix} 0 & D(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n/2}) \\ -D(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n/2})^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

In that case,

$$\operatorname{tr}(F^*F) = \sum_{i=1}^{n/2} \lambda_i^{-2} + \lambda_i^2 > 2.$$

□

Lemme 10.17. *Let H be a compact $SO(3)$-deformation, with fundamental comodule (W, α) endowed with an H-invariant inner product. Then there exist morphisms of H-comodules*

$$e : W \otimes W \to \mathbb{C}, \qquad C : W \otimes W \to W \tag{10.1}$$

and some scalars $\tau > 2$, $R \in \{\pm 1\}$ such that the following compatibility relations hold (where $e^* : \mathbb{C} \to W \otimes W$ is the adjoint of e and $D := (\mathrm{id}_W \otimes C)(e^* \otimes \mathrm{id}_W) : W \to W \otimes W$) :

$$(e \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes e^*) = R\,\mathrm{id}_W \qquad (\mathrm{id}_W \otimes e)(e^* \otimes \mathrm{id}_W) = R\,\mathrm{id}_W \tag{10.2a}$$

$$CD = \mathrm{id}_W \qquad ee^* = \tau\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \tag{10.2b}$$

$$Ce^* = 0 \qquad eD = 0 \tag{10.2c}$$

$$e(C \otimes \mathrm{id}_W) = e(\mathrm{id}_W \otimes C) \qquad (\mathrm{id}_W \otimes C)(e^* \otimes \mathrm{id}_W) = (C \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes e^*) \tag{10.2d}$$

$$(\mathrm{id}_W \otimes D)e^* = (D \otimes \mathrm{id}_W)e^* \qquad (\mathrm{id}_W \otimes e)(D \otimes \mathrm{id}_W) = (e \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes D) \tag{10.2e}$$

$$(\mathrm{id}_W \otimes C)(D \otimes \mathrm{id}_W) = (C \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes D) = R(R - \tau)^{-1}\,\mathrm{id}_{W^{\otimes 2}} + (\tau - R)^{-1} e^* e + DC \tag{10.2f}$$

$$(\mathrm{id}_W \otimes D)D = R(R - \tau)^{-1}(e^* \otimes \mathrm{id}_W) + R(\tau - R)^{-1}(\mathrm{id}_W \otimes e^*) + (D \otimes \mathrm{id}_W)D \tag{10.2g}$$

$$C(\mathrm{id}_W \otimes C) = (R - \tau)^{-1}(\mathrm{id}_W \otimes e) + (\tau - R)^{-1}(e \otimes \mathrm{id}_W) + C(C \otimes \mathrm{id}_W) \tag{10.2h}$$

Démonstration. Let $(w_i)_{1 \leq i \leq n}$ be an orthonormal basis of W and let $(x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ be the associated unitary multiplicative matrix. Recall that we write $\overline{x} = (x_{ij}^*)$. From the fusion rules, we get $\dim W \geq 3$.

We have $\overline{W} \simeq W$ by the fusion rules, hence there exist $F \in GL_n(\mathbb{C})$ and $R \in \mathbb{R}^*$ such that $\bar{x} = F^{-1} x F$ and $F\overline{F} = RI_n$. Up to a nonzero real number, we can assume that $R \in \{\pm 1\}$. The map e defined by

$$e(w_i \otimes w_j) = \overline{F}_{ji}$$

is H-colinear and we have

$$e^*(1) = \sum F_{ji} w_i \otimes w_j$$

and e, e^* satisfy (10.2ab) for $\tau = \mathrm{tr}(F^*F) > 2$ according to Lemma 10.16.

The fusion rules of $SO(3)$ give :

$$W \otimes W \simeq \mathbb{C} \oplus W \oplus W_2^H \qquad \textit{(FR)}$$

and there exists a nonzero (hence surjective) H-colinear map $C : W \otimes W \to W$. By Frobenius reciprocity, there exist isomorphisms

$$\begin{aligned} \Psi_1 : \mathrm{Hom}_H(W^{\otimes 3}, \mathbb{C}) &\to \mathrm{Hom}_H(W^{\otimes 2}, W) \\ f &\mapsto (\mathrm{id}_W \otimes f)(e^* \otimes \mathrm{id}_{W^{\otimes 2}}) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Psi_1^{-1} : \mathrm{Hom}_H(W^{\otimes 2}, W) &\to \mathrm{Hom}_H(W^{\otimes 3}, \mathbb{C}) \\ g &\mapsto Re(\mathrm{id}_W \otimes g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_2 : \mathrm{Hom}_H(W^{\otimes 3}, \mathbb{C}) &\to \mathrm{Hom}_H(W^{\otimes 2}, W) \\ f &\mapsto (f \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_{W^{\otimes 2}} \otimes e^*) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Psi_2^{-1} : \mathrm{Hom}_H(W^{\otimes 2}, W) &\to \mathrm{Hom}_H(W^{\otimes 3}, \mathbb{C}) \\ g &\mapsto Re(g \otimes \mathrm{id}_W) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_1 : \mathrm{Hom}_H(W^{\otimes 2}, W) &\to \mathrm{Hom}_H(W, W^{\otimes 2}) \\ f &\mapsto (f \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes e^*) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Phi_1^{-1} : \mathrm{Hom}_H(W^{\otimes 2}, W) &\to \mathrm{Hom}_H(W, W^{\otimes 2}) \\ g &\mapsto R(\mathrm{id}_W \otimes e)(g \otimes \mathrm{id}_W) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 : \mathrm{Hom}_H(W^{\otimes 2}, W) &\to \mathrm{Hom}_H(W, W^{\otimes 2}) \\ f &\mapsto (\mathrm{id}_W \otimes f)(e^* \otimes \mathrm{id}_W) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Phi_2^{-1} : \mathrm{Hom}_H(W^{\otimes 2}, W) &\to \mathrm{Hom}_H(W, W^{\otimes 2}) \\ g &\mapsto R(e \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes g) \end{aligned}$$

Put

$$D := \Phi_2(C) = (\mathrm{id}_W \otimes C)(e^* \otimes \mathrm{id}_W) \tag{10.3}$$

By Schur's lemma, we can rescale C such that $CD = \mathrm{id}_W$. Again by Schur's lemma, we have $Ce^* = 0$ et $eD = 0$. This gives relations (10.2bc).

Let us show that there exists $\omega \in \mathbb{C}^*$ such that the following relations hold :

$$\begin{gathered} e(C \otimes \mathrm{id}_W) = \omega e(\mathrm{id}_W \otimes C) \\ D = (\mathrm{id}_W \otimes C)(e^* \otimes \mathrm{id}_W) = \omega (C \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes e^*). \end{gathered} \tag{10.4}$$

According to Schur's lemma and the isomorphism (FR), there exist ω_1 and ω_2 such that

$$e(C \otimes \mathrm{id}_W) = \omega_1 e(\mathrm{id}_W, C) = \omega_1 R \Psi_1^{-1}(C)$$

and

$$(\mathrm{id}_W \otimes C)(e^* \otimes \mathrm{id}_W) = \omega_2 (C \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes e^*) = \omega_2 \Phi_1(C).$$

Hence on the first hand we have

$$\begin{aligned} \omega_1 C &= R \Psi_1(e(C \otimes \mathrm{id}_W)) \\ &= R(\mathrm{id}_W \otimes e)(\mathrm{id}_W \otimes C \otimes \mathrm{id}_W)(e^* \otimes \mathrm{id}_W \otimes \mathrm{id}_W) \end{aligned}$$

and on the other hand we have

$$\begin{aligned} \omega_2 C &= \Phi_1^{-1}((\mathrm{id}_W \otimes C)(e^* \otimes \mathrm{id}_W)) \\ &= R(\mathrm{id}_W \otimes e)(\mathrm{id}_W \otimes C \otimes \mathrm{id}_W)(e^* \otimes \mathrm{id}_W \otimes \mathrm{id}_W) \end{aligned}$$

so $\omega_1 = \omega_2 := \omega$. Since $C = \omega \Phi_2^{-1}((C \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes e^*))$, we have $\omega \neq 0$.

Let us show that

$$\begin{gathered} (\mathrm{id}_W \otimes e)(D \otimes \mathrm{id}_W) = \omega (e \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes D) = \omega RC \\ (\mathrm{id}_W \otimes D)e^* = \omega (D \otimes \mathrm{id}_W)e^*. \end{gathered} \tag{10.5}$$

We have $D = (\mathrm{id}_W \otimes C)(e^* \otimes \mathrm{id}_W) = \omega(C \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes e^*)$

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_W \otimes e)(D \otimes \mathrm{id}_W) &= (\mathrm{id}_W \otimes e)(\mathrm{id}_W \otimes C \otimes \mathrm{id}_W)(e^* \otimes \mathrm{id}_W \otimes \mathrm{id}_W)\\ &\overset{(10.4)}{=} \omega(\mathrm{id}_W \otimes e)(\mathrm{id}_W \otimes \mathrm{id}_W \otimes C)(e^* \otimes \mathrm{id}_W \otimes \mathrm{id}_W)\\ &\overset{(10.2a)}{=} \omega RC\end{aligned}$$

and

$$(e \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes D) \overset{(10.3)}{=} (e \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes \mathrm{id}_W \otimes C)(\mathrm{id}_W \otimes e^* \otimes \mathrm{id}_W) \overset{(10.2a)}{=} RC.$$

Hence $(\mathrm{id}_W \otimes e)(D \otimes \mathrm{id}_W) = \omega(e \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes D)$. Moreover

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_W \otimes D)e^* &= \omega(\mathrm{id}_W \otimes C \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes \mathrm{id}_W \otimes e^*)e^*\\ &= \omega(\mathrm{id}_W \otimes C \otimes \mathrm{id}_W)(e^* \otimes \mathrm{id}_W \otimes \mathrm{id}_W)e^*\\ &\overset{(10.3)}{=} \omega(D \otimes \mathrm{id}_W)e^*.\end{aligned}$$

Let us show that

$$(\mathrm{id}_W \otimes C)(D \otimes \mathrm{id}_W) = \omega(C \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes D) \tag{10.6}$$

Using relations (10.5) and (10.2a), we compute $\omega^2(e \otimes \mathrm{id}_{W^{\otimes 2}})(\mathrm{id}_W \otimes D \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes D)$ in two different ways :

$$\begin{aligned}&\omega^2(e \otimes \mathrm{id}_{W^{\otimes 2}})(\mathrm{id}_W \otimes D \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes D)\\ &\quad\overset{(10.5)}{=} \omega(\mathrm{id}_W \otimes e \otimes \mathrm{id}_W)(D \otimes \mathrm{id}_W \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes D)\\ &\quad= \omega(\mathrm{id}_W \otimes e \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes \mathrm{id}_W \otimes D)(D \otimes \mathrm{id}_W)\\ &\quad= (\mathrm{id}_{W^{\otimes 2}} \otimes e)(\mathrm{id}_W \otimes D \otimes \mathrm{id}_W)(D \otimes \mathrm{id}_W)\\ &\quad\overset{(10.3)}{=} (\mathrm{id}_{W^{\otimes 2}} \otimes e)(\mathrm{id}_{W^{\otimes 2}} \otimes C \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes e^* \otimes \mathrm{id}_{W^{\otimes 2}})(D \otimes \mathrm{id}_W)\\ &\quad= \omega(\mathrm{id}_{W^{\otimes 2}} \otimes e)(\mathrm{id}_{W^{\otimes 3}} \otimes C)(\mathrm{id}_W \otimes e^* \otimes \mathrm{id}_{W^{\otimes 2}})(D \otimes \mathrm{id}_W)\\ &\quad= \omega(\mathrm{id}_W \otimes \mathrm{id}_W \otimes e)(\mathrm{id}_W \otimes e^* \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes C)(D \otimes \mathrm{id}_W)\\ &\quad\overset{(10.2a)}{=} R\omega(\mathrm{id}_W \otimes C)(D \otimes \mathrm{id}_W)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\omega^2(e \otimes \mathrm{id}_{W^{\otimes 2}})(\mathrm{id}_W \otimes D \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes D)\\ &\quad\overset{(10.3)}{=} \omega^2(e \otimes \mathrm{id}_{W^{\otimes 2}})(\mathrm{id}_{W^{\otimes 2}} \otimes C \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes e^* \otimes \mathrm{id}_{W^{\otimes 2}})(\mathrm{id}_W \otimes D)\\ &\quad= \omega^2(C \otimes \mathrm{id}_W)(e \otimes \mathrm{id}_W \otimes \mathrm{id}_{W^{\otimes 2}})(\mathrm{id}_W \otimes e^* \otimes \mathrm{id}_{W^{\otimes 2}})(\mathrm{id}_W \otimes D)\\ &\quad\overset{(10.2a)}{=} R\omega^2(C \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes D)\end{aligned}$$

and hence $(\mathrm{id}_W \otimes C)(D \otimes \mathrm{id}_W) = \omega(C \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes D)$.

Let us show that $\omega^3 = 1$. Denote $A := \omega^2 e(C \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes D)e^*$. On the first hand, we have :

$$\begin{aligned}A &= \omega^2 e(C \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes D)e^*\\ &\overset{(10.6)}{=} \omega e(\mathrm{id}_W \otimes C)(D \otimes \mathrm{id}_W)e^*\\ &\overset{(10.4)}{=} e(C \otimes \mathrm{id}_W)(D \otimes \mathrm{id}_W)e^*\\ &= ee^*.\end{aligned}$$

On the second hand, we have :

$$\begin{aligned} A &= \omega^2 e(C\otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes D)e^* \\ &\overset{(10.5)}{=} \omega^3 e(C\otimes \mathrm{id}_W)(D\otimes \mathrm{id}_W)e^* \cdot \\ &= \omega^3 ee^* \end{aligned}$$

Hence $\omega^3 = 1$.

By Frobenius reciprocity, we have isomorphisms

$$\begin{aligned} \Phi &: \mathrm{End}_H(W^{\otimes 2}) \to \mathrm{Hom}_H(W, W^{\otimes 3}),\ f \mapsto (\mathrm{id}_W \otimes f)(e^* \otimes \mathrm{id}_W) \\ \Psi &: \mathrm{End}_H(W^{\otimes 2}) \to \mathrm{Hom}_H(W, W^{\otimes 3}),\ f \mapsto (f\otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes e^*). \end{aligned}$$

Using relations (10.5) and (10.2ab) we can compute the following :

$$\begin{aligned} \Phi((\mathrm{id}_W \otimes C)(D\otimes \mathrm{id}_W)) &= \omega(D\otimes \mathrm{id}_W)D & \Psi((\mathrm{id}_W \otimes C)(D\otimes \mathrm{id}_W)) &= \omega^2(\mathrm{id}_W \otimes D)D \\ \Phi(DC) &= (\mathrm{id}_W \otimes D)D & \Psi(DC) &= \omega^2(D\otimes \mathrm{id}_W)D \\ \Phi(e^*e) &= R(\mathrm{id}_W \otimes e^*) & \Psi(e^*e) &= R(e^*\otimes \mathrm{id}_W) \\ \Phi(\mathrm{id}_{W^{\otimes 2}}) &= (e^*\otimes \mathrm{id}_W) & \Psi(\mathrm{id}_{W^{\otimes 2}}) &= (\mathrm{id}_W \otimes e^*). \end{aligned}$$

It is clear by (FR) and Schur's lemma that $\{\mathrm{id}_{W^{\otimes 2}}, e^*e, DC\}$ is a basis of $\mathrm{End}_H(W\otimes W)$. Let α, β and $\gamma \in \mathbb{C}$ be such that

$$B := (\mathrm{id}_W \otimes C)(D\otimes \mathrm{id}_W) = \omega(C\otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes D) = \alpha\, \mathrm{id}_{W^{\otimes 2}} + \beta e^* e + \gamma DC. \tag{10.7}$$

First, using relations (10.4) and (10.2b), we have $eB = \omega^2 e = (\alpha + \tau\beta)e$ so $\alpha + \tau\beta = \omega^2$. We also have

$$\omega^2\Phi(B) = (D\otimes \mathrm{id}_W)D = \omega^2\alpha(e^*\otimes \mathrm{id}_W) + \omega^2 R\beta(\mathrm{id}_W \otimes e^*) + \omega^2\gamma(\mathrm{id}_W \otimes D)D \tag{10.8}$$

and

$$\Psi(B) = \omega^2(\mathrm{id}_W \otimes D)D = \alpha(\mathrm{id}_W \otimes e^*) + R\beta(e^*\otimes \mathrm{id}_W) + \gamma\omega^2(D\otimes \mathrm{id}_W)D \tag{10.9}$$

which lead to the following relations between the coefficients :

$$\begin{cases} \alpha + \tau\beta = \omega^2 \\ \alpha + \omega R\gamma\beta = 0 \\ R\beta + \omega\gamma\alpha = 0 \\ \gamma^2 = \omega \end{cases}$$

In particular, $\alpha \neq 0 \neq \beta$. Consider now $\omega^2 C(C\otimes \mathrm{id}_W)\Phi(B) \in \mathrm{End}_H(W)$. On the first hand we have :

$$C(\mathrm{id}_W \otimes C)(D\otimes \mathrm{id}_W)D \overset{(10.7)}{=} CBD = C(\alpha\, \mathrm{id}_{W^{\otimes 2}} + \beta e^*e + \gamma DC)D \overset{(10.2b)}{=} (\alpha+\gamma)\, \mathrm{id}_W\,.$$

On the other hand, we have :

$$\begin{aligned} &C(\mathrm{id}_W \otimes C)\big(\omega^2\alpha(e^*\otimes \mathrm{id}_W) + \omega^2 R\beta(\mathrm{id}_W \otimes e^*) + \omega^2\gamma(\mathrm{id}_W \otimes D)D\big) \\ &\qquad = \omega^2\alpha C(1\otimes C)(e^*\otimes \mathrm{id}_W) + \omega^2 R\beta C(1\otimes C)(\mathrm{id}_W \otimes e^*) + \omega^2\gamma C(1\otimes C)(\mathrm{id}_W \otimes D)D \\ &\qquad \overset{(10.3)}{=} \omega^2\alpha CD + \omega^2\gamma\, \mathrm{id}_W \overset{(10.2b)}{=} \omega^2(\alpha+\gamma)\, \mathrm{id}_W\,. \end{aligned}$$

Hence
$$\alpha+\gamma=\omega^2(\alpha+\gamma).$$
By relation (10.6), we have the identity
$$(\mathrm{id}_W \otimes B)(D\otimes \mathrm{id}_W)D=\omega(B\otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes D)D,$$
of which we develop the two sides :
$$\begin{aligned}
&(\mathrm{id}_W \otimes B)(D\otimes \mathrm{id}_W)D\\
&\overset{(10.7,10.2a,10.4)}{=}\alpha(D\otimes \mathrm{id}_W)D+\omega R\beta(\mathrm{id}_W \otimes e^*)+\gamma(\mathrm{id}_W \otimes D)(\mathrm{id}_W \otimes C)(D\otimes \mathrm{id}_W)D\\
&\overset{(10.7)}{=}\alpha(D\otimes \mathrm{id}_W)D+\omega R\beta(\mathrm{id}_W \otimes e^*)+\gamma(\mathrm{id}_W \otimes D)(\alpha\,\mathrm{id}_{W^{\otimes 2}}+\beta e^*e+\gamma DC)D\\
&\overset{(10.2bc)}{=}\alpha(D\otimes \mathrm{id}_W)D+\omega R\beta(\mathrm{id}_W \otimes e^*)+(\alpha\gamma+\gamma^2)(\mathrm{id}_W \otimes D)D\\
&\overset{(10.9)}{=}\alpha(D\otimes \mathrm{id}_W)D+\omega R\beta(\mathrm{id}_W \otimes e^*)+(\alpha\gamma+\omega)(\omega\alpha(\mathrm{id}_W \otimes e^*)\\
&\quad+\omega R\beta(e^*\otimes \mathrm{id}_W)+\gamma(D\otimes \mathrm{id}_W)D)\\
&=(\alpha+\alpha\omega+\omega\gamma)(D\otimes \mathrm{id}_W)D+\omega(R\beta+\alpha^2\gamma+\omega\alpha)(\mathrm{id}_W \otimes e^*)\\
&\quad+\omega R\beta(\alpha\gamma+\omega)(e^*\otimes \mathrm{id}_W)
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
&\omega(B\otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes D)D\\
&\overset{(10.7,10.2a)}{=}\omega\alpha(\mathrm{id}_W \otimes D)D+\omega R\beta(e^*\otimes \mathrm{id}_W)+\omega\gamma(D\otimes \mathrm{id}_W)(C\otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes D)D\\
&\overset{(10.6)}{=}\omega\alpha(\mathrm{id}_W \otimes D)D+\omega R\beta(e^*\otimes \mathrm{id}_W)+\gamma(D\otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes C)(D\otimes \mathrm{id}_W)D\\
&\overset{(10.7)}{=}\omega\alpha(\mathrm{id}_W \otimes D)D+\omega R\beta(e^*\otimes \mathrm{id}_W)+\gamma(D\otimes \mathrm{id}_W)(\alpha\,\mathrm{id}_{W^{\otimes 2}}+\beta e^*e+\gamma DC)D\\
&=\omega\alpha(\mathrm{id}_W \otimes D)D+\omega R\beta(e^*\otimes \mathrm{id}_W)+(\alpha\gamma+\gamma^2)(D\otimes \mathrm{id}_W)D\\
&\overset{(10.9)}{=}\omega\alpha(\omega\alpha(\mathrm{id}_W \otimes e^*)+\omega R\beta(e^*\otimes \mathrm{id}_W)+\gamma(D\otimes \mathrm{id}_W)D)\\
&\quad+\omega R\beta(e^*\otimes \mathrm{id}_W)+(\alpha\gamma+\gamma^2)(D\otimes \mathrm{id}_W)D\\
&=\omega^2\alpha^2(\mathrm{id}_W \otimes e^*)+\omega R\beta(\omega\alpha+1)(e^*\otimes \mathrm{id}_W)+(\omega\alpha\gamma+\alpha\gamma+\gamma^2)(D\otimes \mathrm{id}_W)D.
\end{aligned}$$
This leads to several relations between the coefficients. In particular, we collect :
$$\begin{cases}\alpha+\gamma=\omega^2(\alpha+\gamma)\\ \alpha+\omega\alpha+\omega\gamma=\omega\alpha\gamma+\alpha\gamma+\gamma^2\\ \alpha\gamma+\omega=\omega\alpha+1\\ \gamma^2=\omega\end{cases}$$
Assume that $\omega^2\neq 1$, then :
$$\begin{cases}\alpha=-\gamma\\ -\alpha^3+1=0\\ \gamma^2=\omega\end{cases}$$
To summarize, we have
$$\begin{cases}\alpha+\tau\beta=\omega^2\\ \alpha+\omega R\gamma\beta=0\\ \alpha=-\gamma\\ \alpha^3+1=0\\ \gamma^2=\omega\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha^3+1=0\\ \alpha+\tau\beta=\omega^2\\ \alpha=-\gamma\\ \alpha+R\beta=0\\ \omega=\gamma^{-1}\end{cases}$$

In particular, we have

$$\alpha + \tau\beta = \omega^2 \Rightarrow \alpha - \tau R\alpha = -\alpha \Rightarrow \alpha(2 - R\tau) = 0.$$

Thus $\tau = 2R$, which contradict Lemma 10.16. Hence $\omega^2 = 1 = \omega^3$ and $\omega = 1$. Moreover, we can consider once more the equality

$$\alpha\gamma + \omega = \omega\alpha + 1 \overset{\omega=1}{\Rightarrow} \alpha\gamma + 1 = \alpha + 1$$

and we have $\gamma = 1$.

Hence, we have

$$\begin{aligned} &\gamma = \omega = 1,\ \tau \neq R \\ &\alpha = -R\beta = R(R-\tau)^{-1} \end{aligned}$$

and, in view of 10.7, we have

$$B = R(R-\tau)^{-1}\,\mathrm{id}_{W^{\otimes 2}} - (R-\tau)^{-1} e^* e + DC$$

which gives relations (10.2f), and from relations (10.9), we get relation (10.2g). Finally, we have an isomorphism

$$\begin{aligned} \Omega : \mathrm{End}_H(W^{\otimes 2}) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_H(W^{\otimes 3}, W) \\ f &\longmapsto R(\mathrm{id}_W \otimes e)(f \otimes \mathrm{id}_W). \end{aligned}$$

In particular, using relations (10.2abc) and (10.4), we can compute the following :

$$\begin{aligned} \Omega((\mathrm{id}_W \otimes C)(D \otimes \mathrm{id}_W)) &= C(\mathrm{id}_W \otimes C) \\ \Omega(DC) &= C(C \otimes \mathrm{id}_W) \\ \Omega(e^* e) &= (e \otimes \mathrm{id}_W) \\ \Omega(\mathrm{id}_{W^{\otimes 2}}) &= R(\mathrm{id}_W \otimes e) \end{aligned}$$

This isomorphism applied to the relation (10.2f) gives the relation (10.2h). □

The next lemma will allow us to define the $*$-structure on the algebra (A, φ) in Theorem 10.1.

Lemme 10.18. *Let H be a compact $SO(3)$-deformation, with fundamental comodule (W, α). Then $R = 1$ and there exist an antilinear map $* : W \to W$ such that :*

$$\begin{aligned} &w^{**} = w, && \forall v \in W, && (10.10a) \\ &e(v^* \otimes w^*) = \overline{e(w \otimes v)}, && \forall v, w \in W, && (10.10b) \\ &e(w \otimes w^*) > 0, && \forall w \in W - (0), && (10.10c) \\ &C(v^* \otimes w^*) = C(w \otimes v)^*, && \forall v, w \in W. && (10.10d) \end{aligned}$$

Démonstration. Let $(w_i)_{1 \le i \le n}$ be an orthonormal basis of W and let $(x_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ be the associated unitary multiplicative matrix of coefficients. According to the beginning of the previous proof, the generators x_{ij} and x_{ij}^* are linked by the relations $\overline{x} = F^{-1} x F$, $F \in GL_n(\mathbb{C})$ satisfying $F\overline{F} = RI_n$, $R \in \{\pm 1\}$. Let $* : W \to W$ be the antilinear map defined by $w_i^* = \sum_k w_k F_{ki}$. Note that we have

$$e^*(1) = \sum_{i,j=1}^{n} F_{ji} w_i \otimes w_j = \sum_{i=1}^{n} w_i \otimes w_i^*. \qquad (10.11)$$

For $\gamma \in \mathbb{C}^*$, denote $C_\gamma = \gamma C$. We begin to show that, with $\gamma \in \{1, \mathrm{i}\}$ if $R = 1$ and $\gamma \in \{1 \pm \mathrm{i}\}$ if $R = -1$ (where $\mathrm{i}^2 = -1$), the following relations occur :

$$w^{**} = Rw, \qquad \forall v \in W, \tag{10.12a}$$
$$e(v^* \otimes w^*) = R\overline{e(w \otimes v)}, \qquad \forall v, w \in W, \tag{10.12b}$$
$$e(w \otimes w^*) > 0, \qquad \forall w \in W - (0), \tag{10.12c}$$
$$C_\gamma(v^* \otimes w^*) = C_\gamma(w \otimes v)^*, \qquad \forall v, w \in W. \tag{10.12d}$$

We have

$$w_i^{**} = (\sum_k w_k F_{ki})^* = \sum_k w_k^* \overline{F}_{ki} = \sum_{k,l} w_l F_{lk} \overline{F}_{ki} = Rw_i$$

and relation (10.12a) follows.

Let us check the second relation. On the first hand, we have $e(w_i \otimes w_j) = \overline{F}_{ji}$ by definition, and on the other hand, we get

$$e(w_j^* \otimes w_i^*) = \sum_{k,l} F_{ki} F_{lj} \overline{F}_{kl} = RF_{ji} = R\overline{e(w_i \otimes w_j)}$$

and relation (10.12b) follows.

Relation (10.12c) can be seen as follows. Let $w = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i \in W$, $w \neq 0$, we compute

$$\begin{aligned} e(w \otimes w^*) &= \sum_{i,j} \lambda_i \overline{\lambda_j} e(w_i \otimes w_j^*) = \sum_{i,j,k} \lambda_i \overline{\lambda_j} F_{kj} \overline{F}_{ki} \\ &= \sum_k (\sum_i \lambda_i \overline{F}_{ki})(\sum_j \overline{\lambda_j} F_{kj}) = \sum_k (\sum_i \lambda_i \overline{F}_{ki})\overline{(\sum_i \lambda_i \overline{F}_{ki})} > 0. \end{aligned}$$

To show relation (10.12d), remark that we have, for all $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} \alpha(w_i^*) &= \sum_k \alpha(w_k) F_{ki} = \sum_{k,p} w_p \otimes x_{pk} F_{ki} \\ &= \sum_p w_p \otimes (xF)_{pi} = \sum_p w_p \otimes (F\overline{x})_{pi} \\ &= \sum_{k,p} w_p \otimes F_{pk} x_{ki}^* = \sum_k w_k^* \otimes x_{ki}^*. \end{aligned} \tag{10.13}$$

Define the antilinear map

$$\# : W \otimes W \to W \otimes W, v \otimes w \mapsto (v \otimes w)^\# := w^* \otimes v^*.$$

According to (10.12a), it is an involution and we have, for all $1 \leq i, j \leq n$

$$\alpha_{W \otimes W}((w_i \otimes w_j)^\#) = \sum_{k,l} (w_k \otimes w_l)^\# \otimes (x_{ki} x_{lj})^*.$$

Hence the map

$$\tilde{C} : W \otimes W \to W, w \mapsto C(w^\#)^*$$

is H-colinear, and by Schur's lemma, there exists $\lambda \in \mathbb{C}$ such that $\tilde{C} = \lambda C$. In the same way, define the colinear map

$$\tilde{D} : W \to W \otimes W, w \mapsto D(w^*)^\#.$$

Using relations (10.2b) and (10.12a), it is clear that $\tilde{C}\tilde{D} = R\,\mathrm{id}_W$. Moreover, we have $\tilde{D} = (\tilde{C} \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes e^*)$. Indeed, for all $1 \le i \le n$,

$$\begin{aligned} D(w_i^*)^\# &\overset{(10.3)}{=} \big((\mathrm{id}_W \otimes C)(e^* \otimes \mathrm{id}_W)(w_i^*)\big)^\# \overset{(10.11)}{=} \big(\sum_p w_p \otimes C(w_p^* \otimes w_i^*)\big)^\# \\ &= \sum_p C(w_p^* \otimes w_i^*)^* \otimes w_p^* = \sum_p \tilde{C}(w_i \otimes w_p) \otimes w_p^* \\ &\overset{(10.11)}{=} (\tilde{C} \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes e^*)(w_i). \end{aligned}$$

Hence, according to relation (10.2b), $\tilde{C}\tilde{D} = \lambda^2\,\mathrm{id}_W$, and $\lambda^2 = R$. Choose $\gamma \in \mathbb{C}^*$, with $\gamma \in \{1, \mathrm{i}\}$ if $R = 1$, $\gamma \in \{1 \pm \mathrm{i}\}$ if $R = -1$, such that $\gamma R\overline{\lambda} = \overline{\gamma}$, we have the claimed relation (10.12d)

$$C_\gamma(v^* \otimes w^*) = \gamma R\overline{\lambda}(C(w \otimes v))^* = \overline{\gamma}(C(w \otimes v))^* = C_\gamma(w \otimes v)^*, \quad \forall\, v, w \in W.$$

Let us show that $R = 1$. We assume that $R = -1$ and we use relation (10.12d) with $\gamma \in \{1 \pm \mathrm{i}\}$. On the first hand, we have, for $v, w \in W$,

$$C_\gamma(w \otimes v)^{**} \overset{(10.12a)}{=} -C_\gamma(w \otimes v)$$

and on the other hand, we have

$$C_\gamma(w \otimes v)^{**} \overset{(10.12d)}{=} (C_\gamma(v^* \otimes w^*))^* \overset{(10.12d)}{=} C_\gamma(w^{**} \otimes v^{**}) \overset{(10.12a)}{=} C_\gamma(w \otimes v).$$

Since $C_\gamma \neq 0$, this is a contradiction, and $R = 1$.

So far, we have the relations (10.10abc). Let us show the remaining relation (10.10d). For all $v, w \in W$, we have $C(v \otimes w)^* = \lambda C(w^* \otimes v^*)$ with $\lambda \in \{\pm 1\}$, and we need to show that $\lambda = 1$. For all $1 \le i \le n$ and all $v \in W$, using (10.10c), we have

$$e\big(C(v \otimes w_i) \otimes C(v \otimes w_i)^*\big) \ge 0.$$

Hence, for all $v \in W - (0)$, we have

$$\begin{aligned} 0 \le \sum_{i=1}^n e\big(C(v \otimes w_i) \otimes C(v \otimes w_i)^*\big) &= \lambda \sum_{i=1}^n e\big(C(v \otimes w_i) \otimes C(w_i^* \otimes v^*)\big) \\ \overset{(10.2d)}{=} \lambda \sum_{i=1}^n e\big(C(C \otimes \mathrm{id}_W)(v \otimes w_i \otimes w_i^*) \otimes v^*\big) &= \lambda e\big(C(C \otimes \mathrm{id}_W)(v \otimes \sum_{i=1}^n (w_i \otimes w_i^*)) \otimes v^*\big) \\ \overset{(10.11)}{=} \lambda e\big(C(C \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes e^*)(v) \otimes v^*\big) &\overset{(10.3)}{=} \lambda e\big(CD(v) \otimes v^*\big) \\ \overset{(10.2b)}{=} \lambda e(v \otimes v^*). \end{aligned}$$

Since $e(v \otimes v^*) > 0$, we have $\lambda > 0$ hence $\lambda = 1$, and we have the claimed relation (10.10d). $\square$

We are now able to prove Theorem 10.1, that is, to show that any compact $SO(3)$-deformation is isomorphic to the quantum automorphism group of a finite-dimensional measured C^*-algebra.

Proof of Theorem 10.1. Let H be a compact Hopf algebra whose corepresentation semi-ring is isomorphic to that of $SO(3)$. We write $(W_n^H)_{n\in\mathbb{N}}$ its family of simple comodules and we denote by $W := W_1^H$ its fundamental comodule, with α'_W the associated coaction. We use the notations introduced in the previous lemmas.

The first thing to do is to define a finite-dimensional measured C^*-algebra (A, φ) together with an H-coaction. Let A be the H-comodule $\mathbb{C} \oplus W$, $\dim(A) \geq 4$. Endow A with the following maps : let $m : A\otimes A \to A$, $u : \mathbb{C} \to A$ and $\varphi : A \to \mathbb{C}$ be the H-colinear maps defined by

$$\begin{aligned} m(\lambda \otimes \mu) &= \lambda\mu, && \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \\ m(\lambda \otimes v) &= m(v \otimes \lambda) = \lambda v, && \forall \lambda \in \mathbb{C},\ v \in W, \\ m(v \otimes w) &= \big((\tau-1)^{-1}e(v \otimes w), C(v \otimes w)\big), && \forall v, w \in W, \\ u(1) &= (1, 0) := 1_A, && \\ \varphi(\lambda, v) &= \lambda, && \forall \lambda \in \mathbb{C},\ v \in W, \end{aligned}$$

and let $* : A \to A$ be the antilinear map defined by :

$$(\lambda, v)^* = (\overline{\lambda}, v^*)$$

where $* : W \to W$ is the antilinear map defined in Lemma 10.18.

- m is associative : The only non-trivial part is to check the associativity on W. This is done as follows :

$$\begin{aligned} m(m \otimes \mathrm{id}_W)_{|W\otimes W\otimes W} &= \big((\tau-1)^{-1}e(C \otimes \mathrm{id}_W),\ C(C \otimes \mathrm{id}_W) + (\tau-1)^{-1}(e \otimes \mathrm{id}_W)\big) \\ &\overset{(10.2dh)}{=} \big((\tau-1)^{-1}e(\mathrm{id}_W \otimes C),\ C(\mathrm{id}_W \otimes C) + (\tau-1)^{-1}(\mathrm{id}_W \otimes e)\big)\cdot \\ &= m(\mathrm{id}_W \otimes m)_{|W\otimes W\otimes W} \end{aligned}$$

  Now we simplify the notations by writing the product $m\big((\lambda, v)\otimes(\mu, w)\big) := (\lambda, v)(\mu, w)$.
- u is a unit : this is clear.
- A is a $*$-algebra : $* : A \to A$ is indeed an antilinear involution by Lemma 10.18, and we have

$$\begin{aligned} \big((\lambda, v)(\mu, w)\big)^* &= \big((\lambda\mu + (\tau-1)^{-1}e(v \otimes w),\ \lambda w + \mu v + C(v \otimes w)\big)^* \\ &= \big(\overline{\lambda\mu} + (\tau-1)^{-1}\overline{e(v \otimes w)},\ \overline{\lambda}w^* + \overline{\mu}v^* + C(v \otimes w)^*\big) \\ &\overset{(10.10bd)}{=} \big(\overline{\mu}\overline{\lambda} + (\tau-1)^{-1}e(w^* \otimes v^*),\ \overline{\lambda}w^* + \overline{\mu}v^* + C(w^* \otimes v^*)\big) \\ &= (\mu, w)^*(\lambda, v)^*. \end{aligned}$$

- φ is a faithful state on A : we have $\varphi(1_A) = 1$ by definition, and

$$\begin{aligned} \varphi((\lambda, w)(\lambda, w)^*) &= \varphi\big(\lambda\overline{\lambda} + (\tau-1)^{-1}e(w \otimes w^*),\ \lambda w^* + \overline{\lambda}w + C(w \otimes w^*)\big) \\ &= |\lambda|^2 + (\tau-1)^{-1}e(w \otimes w^*). \end{aligned}$$

  Hence according to Lemmas 10.16 and 10.18, we have, for all $(\lambda, w) \in A$

$$\varphi((\lambda, w)(\lambda, w)^*) \geq 0$$

  with equality if and only if $(\lambda, w) = 0$.

Thus A is a finite dimensional $*$-algebra having a faithful state, and is a C^*-algebra. There exists a positive multimatrix $E \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n} GL_{d_\lambda^E}(\mathbb{C})$ such that $(A, \varphi) \simeq (A_E, \mathrm{tr}_E)$. By Lemma

10.18 and its proof, and by construction of the structure maps, A is a H-comodule $*$-algebra and φ is equivariant, thus by universality, there exists a Hopf $*$-algebra morphism $f : A_{\mathbf{aut}}(A,\varphi) \to H$ such that $(\mathrm{id}_W \otimes f) \circ \alpha_A = \alpha'_A$. Finally, $W = \ker(\varphi)$ is a $A_{\mathbf{aut}}(A,\varphi)$-subcomodule of A, and by definition of the coactions on A, we have $(\mathrm{id}_W \otimes f) \circ \alpha_W = \alpha'_W$.

Recalling Remark 10.10, we can compute the quantities $\mathrm{Tr}(E^{-1})$ and $\mathrm{tr}(E_\lambda)$.

– $\varphi(1_A) = 1 = \mathrm{Tr}(E^{-1})$.

– The map

$$\tilde{\varphi} : A \overset{\mathrm{id}_A \otimes \tilde{\delta}}{\to} A \otimes A \otimes A \overset{\mathrm{id}_A \otimes m}{\to} A \otimes A \overset{m}{\to} A \overset{\varphi}{\to} \mathbb{C}$$

is a H-colinear map. Using Schur's lemma, we have $\dim(\mathrm{Hom}_H(A,\mathbb{C})) = 1$, hence there exists $c \in \mathbb{C}$ such that $\tilde{\varphi} = c\varphi$. Let us compute $\tilde{\varphi}(1_A)$. A basis of A is given by $a_1 = 1_A$, $a_i = w_{i-1}$ for $i = 2, \dots, n+1$. Then we have

$$B_{ij} := \varphi(a_i a_j) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j = 1, \\ 0 & \text{if } i = 1 \neq j \text{ or } i \neq 1 = j, \\ (\tau-1)^{-1}\overline{F}_{j-1,i-1} & \text{in the other cases.} \end{cases}$$

Hence $\tilde{\delta}$ is given by

$$\tilde{\delta}(1) = \sum_{i,j=1}^{n+1} B_{ij}^{-1} a_i \otimes a_j = 1_A \otimes 1_A + (\tau-1)e^*(1).$$

Hence, using relation (10.2b), we have $\tilde{\varphi}(1_A) = \tau+1 > 3$, so $\tilde{\varphi} = (\tau+1)\varphi$. Comparing with the formula in Remark 10.10, we have $\mathrm{tr}(E_\lambda) = \tau + 1 \neq 0$, for all $1 \leq \lambda \leq n$. Hence φ is a homogeneous state.

We have $(A,\varphi) \simeq (A_E, \mathrm{tr}_E)$ with $\mathrm{Tr}(E^{-1}) \neq 0 \neq \mathrm{tr}(E_\lambda) = \mathrm{tr}(E_\mu)$, for all $1 \leq \lambda, \mu \leq n$, that is, (A,φ) is normalizable by Remark 10.10.

To summarize, there exist a homogeneous measured C^*-algebra (A,φ) and a $*$-Hopf algebra morphism $f : A_{\mathbf{aut}}(A,\varphi) \to H$ such that $W \subset A$ is a $A_{\mathbf{aut}}(A,\varphi)$-subcomodule and $(\mathrm{id}_W \otimes f) \circ \alpha_W = \alpha'_W$, where α_W is the coaction on W of $A_{\mathbf{aut}}(A,\varphi)$. According to [6, 7], $A_{\mathbf{aut}}(A,\varphi)$ is a compact $SO(3)$-deformation and we write $(W_n^A)_{n\in\mathbb{N}}$ its family of simple comodules. Then we have $f_*(W_1^A) \simeq W_1^H$, and by induction, we have $f_*(W_n^A) \simeq W_n^H$ for all $n \in \mathbb{N}$, hence, according to Lemma 2.25, f is an isomorphism of $*$-Hopf algebras and $H \simeq A_{\mathbf{aut}}(A,\varphi)$. $\square$

10.5 Representation theory of quantum automorphism groups

We now investigate the case where φ is not necessarily positive, and the aim of this section is to prove Theorem 10.2.

We will construct equivalences of monoidal categories by using appropriate Hopf bi-Galois objects (see [55]). We will work in the convenient framework of cogroupoids (see [15]).

Définition 10.19. A $\mathbb{C}$-*cogroupoid* $\mathcal{C}$ consists of :

– A set of objects $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

– For any $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, a $\mathbb{C}$-algebra $\mathcal{C}(X,Y)$.

– For any $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, algebra morphisms

$$\Delta_{X,Y}^Z : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{C}(X,Z) \otimes \mathcal{C}(Z,Y) \text{ and } \varepsilon_X : \mathcal{C}(X,X) \to \mathbb{C}$$

and linear maps

$$S_{X,Y} : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{C}(Y,X)$$

satisfying several compatibility diagrams : see [15], the axioms are dual to the axioms defining a groupoid.

A cogroupoid $\mathcal{C}$ is said to be *connected* if $\mathcal{C}(X,Y)$ is a nonzero algebra for any $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Let $E \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n_E} GL_{d_\lambda^E}(\mathbb{C})$ and $F \in \bigoplus_{\mu=1}^{n_F} GL_{d_\mu^F}(\mathbb{C})$ be two multimatrices. We denote $d_E := d_{n_E}^E$ and $d_F := d_{n_F}^F$. The algebra $\mathcal{A}(E,F)$ is the universal algebra with generators $X_{kl,\mu}^{ij,\lambda}$ ($1 \le \lambda \le n_E$, $1 \le i,j \le d_\lambda^E$, $1 \le \mu \le n_F$, $1 \le k,l \le d_\mu^F$) submitted to the relations

$$\sum_{q=1}^{d_\nu^E} X_{ij,\lambda}^{rq,\nu} X_{kl,\mu}^{qs,\nu} = \delta_{\lambda\mu}\delta_{jk} X_{il,\mu}^{rs,\nu}, \qquad \sum_{\mu=1}^{n_F}\sum_{k=1}^{d_\mu^F} X_{kk,\mu}^{ij,\lambda} = \delta_{ij},$$

$$\sum_{\mu=1}^{n_E}\sum_{k,l=1}^{d_\mu^E} E_{kl,\mu}^{-1} X_{ij,\lambda}^{kl,\mu} = F_{ij,\lambda}^{-1}, \qquad \sum_{r,s=1}^{d_\mu^F} F_{rs,\mu} X_{kr,\mu}^{ip,\lambda} X_{sl,\mu}^{qj,\nu} = \delta_{\lambda\nu} E_{pq,\lambda} X_{kl,\mu}^{ij,\lambda}.$$

It is clear that $\mathcal{A}(E,E) = A_{\mathbf{aut}}(A_E, \mathrm{tr}_E)$ as an algebra.

We have the following lemma :

Lemme 10.20. – *For any multimatrices $E \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n_E} GL_{d_\lambda^E}(\mathbb{C})$, $F \in \bigoplus_{\mu=1}^{n_F} GL_{d_\mu^F}(\mathbb{C})$ and $G \in \bigoplus_{\nu=1}^{n_G} GL_{d_\nu^G}(\mathbb{C})$, there exist algebra maps*

$$\Delta_{E,F}^G : \mathcal{A}(E,F) \to \mathcal{A}(E,G) \otimes \mathcal{A}(G,F)$$

defined by $\Delta_{E,F}^G(X_{kl,\mu}^{ij,\lambda}) = \sum_{\nu=1}^{n_G}\sum_{r,s=1}^{d_\nu^G} X_{rs,\nu}^{ij,\lambda} \otimes X_{kl,\mu}^{rs,\nu}$ ($1 \le \lambda \le n_E$, $1 \le i,j \le d_\lambda^E$, $1 \le \mu \le n_F$, $1 \le k,l \le d_\mu^F$) and

$$\varepsilon_E : \mathcal{A}(E) \to \mathbb{C}$$

defined by $\varepsilon_E(X_{kl,\mu}^{ij,\lambda}) = \delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{\lambda\mu}$ ($1 \le \lambda,\mu \le n_E$, $1 \le i,j \le d_\lambda^E$, $1 \le k,l \le d_\mu^E$) such that, for any multimatrix $M \in \bigoplus_{\eta=1}^{n_M} GL_{d_\eta^M}(\mathbb{C})$, the following diagrams commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(E,F) \arrow[r, "\Delta_{E,F}^G"] \arrow[d, "\Delta_{E,F}^M"'] & \mathcal{A}(E,G)\otimes\mathcal{A}(G,F) \arrow[d, "\Delta_{E,G}^M\otimes\mathrm{id}"] \\
\mathcal{A}(E,M)\otimes\mathcal{A}(M,F) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\Delta_{M,F}^G"'] & \mathcal{A}(E,M)\otimes\mathcal{A}(M,G)\otimes\mathcal{A}(G,F)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(E,F) \arrow[d, "\Delta_{E,F}^F"'] \arrow[dr] & \\
\mathcal{A}(E,F)\otimes\mathcal{A}(F) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon_F"'] & \mathcal{A}(E,F)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(E,F) \arrow[d, "\Delta_{E,F}^E"'] \arrow[dr] & \\
\mathcal{A}(E)\otimes\mathcal{A}(E,F) \arrow[r, "\varepsilon_E\otimes\mathrm{id}"'] & \mathcal{A}(E,F)
\end{tikzcd}$$

– *For any multimatrices* $E \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n_E} GL_{d_\lambda^E}(\mathbb{C})$, $F \in \bigoplus_{\mu=1}^{n_F} GL_{d_\mu^F}(\mathbb{C})$, *there exists an algebra morphism*

$$S_{E,F} : \mathcal{A}(E,F) \to \mathcal{A}(F,E)^{op}$$

defined by $S_{E,F}(X_{kl,\mu}^{ij,\lambda}) = \sum_{r=1}^{d_\lambda^E}\sum_{s=1}^{d_\mu^F} E_{jr,\lambda} F_{sl,\mu}^{-1} X_{ri,\lambda}^{sk,\mu}$ $(1 \leq \lambda \leq n_E,\ 1 \leq i,j \leq d_\lambda^E,\ 1 \leq \mu \leq n_F,\ 1 \leq k,l \leq d_\mu^F)$ *such that the following diagrams commute :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}(E) \arrow[r, "\varepsilon_E"] \arrow[d, "\Delta_{E,E}^F"'] & \mathbb{C} \arrow[r, "u"] & \mathcal{A}(E,F) \\ \mathcal{A}(E,F) \otimes \mathcal{A}(F,E) \arrow[rr, "\mathrm{id} \otimes S_{F,E}"'] & & \mathcal{A}(E,F) \otimes \mathcal{A}(E,F) \arrow[u, "m"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}(E) \arrow[r, "\varepsilon_E"] \arrow[d, "\Delta_{E,E}^F"'] & \mathbb{C} \arrow[r, "u"] & \mathcal{A}(F,E) \\ \mathcal{A}(E,F) \otimes \mathcal{A}(F,E) \arrow[rr, "S_{E,F} \otimes \mathrm{id}"'] & & \mathcal{A}(F,E) \otimes \mathcal{A}(F,E) \arrow[u, "m"'] \end{tikzcd}$$

Démonstration. The existence of the algebra morphisms is a consequence of the universal property of $\mathcal{A}(E,F)$, and the commutativity of the diagrams can easily be checked on the generators. □

The previous lemma allows us to define a cogroupoid in the following way :

Définition 10.21. The cogroupoid $\mathcal{A}$ is defined as follows :

1. $\mathrm{Ob}(\mathcal{A}) = \{E \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n} GL_{d_\lambda^E}(\mathbb{C});\ d_E > 1\}$,
2. for $E, F \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, the algebra $\mathcal{A}(E,F)$ is the algebra defined above,
3. the structural maps $\Delta_{\bullet,\bullet}^{\bullet}$, $\varepsilon_\bullet$, and $S_{\bullet,\bullet}$ are defined in the previous lemma.

Remarque 10.22. 1. The condition $d_E > 1$ rules out the case of $A_{\mathbf{aut}}(C(X_n), \psi)$. This is discussed in the Appendix and a solution is provided by Theorem 10.26.
2. The present construction is related to the bialgebras constructed by Tambara in [60].

We now need to study the connectedness of this cogroupoid. We begin by the following technical lemma (we refer to the Appendix for its proof) :

Lemme 10.23. *Let* E, $F \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. *Assume that* $\mathrm{Tr}(E^{-1}) = \mathrm{Tr}(F^{-1})$ *and* $\mathrm{tr}(E_\lambda) = \mathrm{tr}(F_\mu)$ *for all* λ, μ. *Then the algebra* $\mathcal{A}(E,F)$ *is nonzero.*

In particular, we have the following corollary.

Corollaire 10.24. *Let* $\tau, \theta \in \mathbb{C}$. *Let* $\mathcal{A}^{\tau,\theta}$ *be the full subcogroupoid of* $\mathcal{A}$ *with objects*

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{A}^{\tau,\theta}) = \left\{ E \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n} GL_{d_\lambda^E}(\mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{array}{c} 1 < d_E, \\ \mathrm{Tr}(E^{-1}) = \tau, \\ \mathrm{tr}(E_\lambda) = \theta,\ \forall \lambda \end{array} \right\}$$

Then $\mathcal{A}^{\tau,\theta}$ *is connected.*

Using Corollaire 5.5, we have the following result.

Corollaire 10.25. *Let* $E \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n_E} GL_{d_\lambda^E}(\mathbb{C})$, $F \in \bigoplus_{\mu=1}^{n_F} GL_{d_\mu^F}(\mathbb{C})$ *be two multimatrices such that* $1 < d_E, d_F$, $\mathrm{Tr}(E^{-1}) = \mathrm{Tr}(F^{-1})$ *and* $\mathrm{tr}(E_\lambda) = \mathrm{tr}(F_\mu)$ *for all* λ, μ. *Then we have a* $\mathbb{C}$*-linear equivalence of monoidal categories*

$$\mathrm{Comod}(A_{\boldsymbol{aut}}(A_E, \mathrm{tr}_E)) \simeq^{\otimes} \mathrm{Comod}(A_{\boldsymbol{aut}}(A_F, \mathrm{tr}_F))$$

between the comodule categories of $A_{\boldsymbol{aut}}(A_E, \mathrm{tr}_E)$ *and* $A_{\boldsymbol{aut}}(A_F, \mathrm{tr}_F)$ *respectively.*

Moreover, we have the following twisting result, inspired by [9].

Théorème 10.26. *Let* $n \in \mathbb{N}$. *Then the Hopf algebras* $A_{\boldsymbol{aut}}(\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^4)$ *and* $A_{\boldsymbol{aut}}(\mathbb{C}^n \oplus (M_2(\mathbb{C}), \mathrm{tr}))$ *are 2-cocycle twists of each other. In particular, they have monoidal equivalent comodule categories.*

We only sketch the proof of this result by giving the principal ideas but without performing the computations. One may also invoke [22], Theorem 4.7.

Démonstration. The first step is to give a new presentation of these Hopf algebras by using a different basis for the associated measured algebras. In the case of $A = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^4$, we use the linear basis given by the canonical basis on $\mathbb{C}^n$ and the particular basis given in [9] Theorem 3.1. on $\mathbb{C}^4$, and when $A = \mathbb{C}^n \oplus (M_2(\mathbb{C}), \mathrm{tr})$, we use the canonical basis on $\mathbb{C}^n$ and the quaternionic basis used in [19] Proposition 3.2. on $(M_2(\mathbb{C}), \mathrm{tr})$.

The cocycle σ is given by the composition of the non trivial 2-cocycle of the Klein group V (linearly extended to $\mathbb{C}[V]$) and the Hopf algebra surjection (see [9] Theorem 5.1)

$$A_{\mathbf{aut}}(\mathbb{C}^n \oplus (M_2(\mathbb{C}), \mathrm{tr})) \to A_{\mathbf{aut}}(M_2(\mathbb{C}), \mathrm{tr}) \to \mathbb{C}[V].$$

The computations show the existence of a Hopf algebra morphism from $A_{\mathbf{aut}}(\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^4)$ to $A_{\mathbf{aut}}(\mathbb{C}^n \oplus (M_2(\mathbb{C}), \mathrm{tr}))^\sigma$ which is an isomorphism by Lemma 2.25. □

This result enables us to optimize the following result by including the quantum permutation group.

Corollaire 10.27. *Let* (A_E, tr_E) *be a finite dimensional, semisimple, measured algebra of dimension* $\dim A_E \geq 4$, *where* $E \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n} GL_{d_\lambda^E}(\mathbb{C})$ *is a normalizable multimatrix. Then there exist* $q \in \mathbb{C}^*$ *and a* $\mathbb{C}$*-linear equivalence of monoidal categories*

$$\mathrm{Comod}(A_{\boldsymbol{aut}}(A_E, \mathrm{tr}_E)) \simeq^{\otimes} \mathrm{Comod}(\mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3)))$$

between the comodule categories of $A_{\boldsymbol{aut}}(A_E, \mathrm{tr}_E)$ *and* $\mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3))$ *respectively. If* E *is normalized,* $q \in \mathbb{C}^*$ *satisfies* $q^2 - \mathrm{Tr}(E^{-1})q + 1 = 0$.

Démonstration. First assume that $1 < d_E$. According to Remark 10.13, there exists a normalized multimatrix $F \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n} GL_{d_\lambda^E}(\mathbb{C})$ such that $A_{\mathbf{aut}}(A_E, \mathrm{tr}_E) = A_{\mathbf{aut}}(A_F, \mathrm{tr}_F)$ as Hopf algebras. Choose $q \in \mathbb{C}^*$ such that $\mathrm{Tr}(F^{-1}) = q + q^{-1} = \mathrm{tr}(F_\lambda)$ for $\lambda = 1, \ldots, n$. According to the previous corollary, we have a $\mathbb{C}$-linear equivalence of monoidal categories

$$\mathrm{Comod}(A_{\mathbf{aut}}(A_F, \mathrm{tr}_F)) \simeq^{\otimes} \mathrm{Comod}(A_{\mathbf{aut}}(M_2(\mathbb{C}), \mathrm{tr}_q)).$$

Hence according to Example 10.12 (3) we have a $\mathbb{C}$-linear equivalence of monoidal categories

$$\mathrm{Comod}(A_{\mathbf{aut}}(A_E, \mathrm{tr}_E)) \simeq^{\otimes} \mathrm{Comod}(\mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3))).$$

If $E = (e, \dots, e) \in (\mathbb{C}^*)^m$, then $A_E = \mathbb{C}^m = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^4$ with $n \in \mathbb{N}$ by assumption. Using Theorem 10.26, we have a monoidal equivalence

$$\mathrm{Comod}(A_{\mathbf{aut}}(A_E, \mathrm{tr}_E)) \simeq^{\otimes} \mathrm{Comod}(A_{\mathbf{aut}}(\mathbb{C}^n \oplus (M_2(\mathbb{C}), \mathrm{tr})))$$

and we can apply the previous reasoning. □

In particular, Theorem 10.2 is a consequence of Corollary 10.27.

10.6 $SO(3)$-deformations : the general case

We would like to say a word about the $SO(3)$-deformations in the general case. Unlike in the compact case, we have not been able in general to associate a measured algebra (A, φ) to an arbitrary $SO(3)$-deformation. This situation occurs because of the lack of analog of Lemma 10.16 in the general case. However, it is possible to give some partial results and directions concerning the general classification problem.

The representation theory of $SO_{q^{1/2}}(3)$

Recalling that $\mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3))$ is a Hopf subalgebra of $\mathcal{O}(SL_q(2))$, it is possible to describe its corepresentation semi-ring, as follows :

Théorème 10.28. *Let $q \in \mathbb{C}^*$. We say that q is generic if q is not a root of unity or if $q \in \{\pm 1\}$. If q is not generic, let $N \geq 3$ be the order of q, and put*

$$N_0 = \begin{cases} N & \text{if } N \text{ is odd,} \\ N/2 & \text{if } N \text{ is even.} \end{cases}$$

- *First assume that q is generic. Then $\mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3))$ is cosemisimple and has a family of non-isomorphic simple comodules $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ such that :*

  $$W_0 = \mathbb{C}, \quad W_n \otimes W_1 \simeq W_1 \otimes W_n \simeq W_{n-1} \oplus W_n \oplus W_{n+1}, \quad \dim(W_n) = 2n+1, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

  Furthermore, any simple $\mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3))$-comodule is isomorphic to one of the comodule W_n.
- *Now assume that q is not generic and that $N_0 = 2N_1$, $N_1 \in \mathbb{N}^*$. Then $\mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3))$ is not cosemisimple. There exist families $\{V_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, $\{W_n,\ n = 0, \dots, N_1 - 1\}$ of non-isomorphic simple comodules (except for $n = 0$ where $V_0 = W_0 = \mathbb{C}$), such that*

  $$V_n \otimes V_1 \simeq V_1 \otimes V_n \simeq V_{n-1} \oplus V_{n+1}, \quad \dim V_n = n + 1, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

  $$W_n \otimes W_1 \simeq W_1 \otimes W_n \simeq W_{n-1} \oplus W_n \oplus W_{n+1}, \quad \dim W_n = 2n+1, \ \forall n = 1, \dots, N_1 - 1.$$

  The comodule $W_{N_1-1} \otimes W_1$ is not semisimple. It has a simple filtration

  $$(0) \subset W_{N_1-2} \oplus W_{N_1-1} \subset Y \subset W_{N_1-1} \otimes W_1$$

  with $W_{N_1-1} \otimes W_1 / Y \simeq W_{N_1-1}$ and $Y/(W_{N_1-2} \oplus W_{N_1-1}) \simeq V_1$.
  The comodules $W_n \otimes V_m \simeq V_m \otimes W_n$ ($m \in \mathbb{N}$ and $n = 0, \dots, N_1 - 1$) are simple and any simple $\mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3))$-comodule is isomorphic with one of these comodules.

– *Finally assume that q is not generic and that $N_0 = 2N_1 - 1$, $N_1 \in \mathbb{N}^*$. Then $\mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3))$ is not cosemisimple. There exist families $\{V_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, $\{U_n,\ n = 0, \dots, N_0 - 1\}$ of vector spaces (with dimension $\dim V_n = \dim U_n = n+1$) such that the families $\{V_{2n},\ n \in \mathbb{N}\}$ $\{U_{2n},\ n = 0, \dots, N_1 - 1\}$ and $\{V_{2n+1} \otimes U_{2m+1},\ n \in \mathbb{N},\ m = 0, \dots, N_1 - 1\}$ are non-isomorphic simple $\mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3))$-comodules (except for $n = 0$ where $V_0 = U_0 = \mathbb{C}$). They satisfy the fusion rules induced by*

$$V_n \otimes V_1 \simeq V_1 \otimes V_n \simeq V_{n-1} \oplus V_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$U_n \otimes U_1 \simeq U_1 \otimes U_n \simeq U_{n-1} \oplus U_{n+1}\ \forall n = 1, \dots, N_0 - 1.$$

The comodule $U_{2(N_1-1)} \otimes U_2$ is not simple. It has a simple filtration

$$(0) \subset U_{2(N_1-2)} \subset Y \subset U_{2(N_1-1)} \otimes U_2$$

where $U_{2(N_1-1)} \otimes U_2/Y \simeq U_{2(N_1-2)}$ and $Y/U_{2(N_1-2)} \simeq U_1 \otimes V_1$. The comodules $V_n \otimes U_m \simeq U_m \otimes V_n$ (with $n \equiv m (\mathrm{mod}\, 2)$) are simple, and any simple $\mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3))$-comodule is isomorphic with one of these comodules.

Démonstration. We first collect some facts about $SL_q(2)$, $SO_{q^{1/2}}(3)$ and Hopf subalgebras. See [40] for the relations between $SL_q(2)$ and $SO_{q^{1/2}}(3)$ and [41] for the corepresentation theory of $SL_q(2)$.

– Let a, b, c, d be the matrix coefficients of the fundamental 2-dimensional $\mathcal{O}(SL_q(2))$-comodule. Then $\mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3))$ is isomorphic to the Hopf subalgebra of $\mathcal{O}(SL_q(2))$ generated by the even degree monomials in a, b, c, d. Moreover, we have a Hopf algebra isomorphism $\mathcal{O}(SL_q(2))^{\mathrm{Co}\mathbb{C}[\mathbb{Z}_2]} \simeq \mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3))$.
– When q is not generic, the matrix $v = (v_{ij})_{1 \le i,j \le 4}$ with $v_{11} = a^{N_0}$, $v_{12} = b^{N_0}$, $v_{21} = c^{N_0}$ and $v_{22} = d^{N_0}$ is multiplicative, associated to the $\mathcal{O}(SL_q(2))$-comodule V_1.
– Let $A \subset B$ be a Hopf algebra inclusion. Then an A-comodule is semisimple if and only if it is semisimple as a B-comodule. In particular, if B is cosemisimple, so is A.

From those facts, we deduce that the $\mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3))$-comodules are exactly the $\mathcal{O}(SL_q(2))$-comodules with matrix coefficients of even degree in a, b, c, d. The end of the proof comes from combining this with the results and proof from [41]. □

The general case

The study of the fusion rules of $SO(3)$ gives the following :

Lemme 10.29. *Let H be a $SO(3)$-deformation, with fundamental comodule (W, α). Then there exist morphisms of H-comodules*

$$\begin{aligned} e &: W \otimes W \to \mathbb{C}, & \delta &: \mathbb{C} \to W \otimes W, \\ C &: W \otimes W \to W, & D &: W \to W \otimes W, \end{aligned} \tag{10.14}$$

a third root of unity $\omega \in \mathbb{C}$ and a unique nonzero scalar $\tau \in \mathbb{C}^*$ satisfying the following *compatibility relations :*

$$(e \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes \delta) = \mathrm{id}_W \qquad (\mathrm{id}_W \otimes e)(\delta \otimes \mathrm{id}_W) = \mathrm{id}_W \tag{10.15a}$$

$$D = (\mathrm{id}_W \otimes C)(\delta \otimes \mathrm{id}_W) \tag{10.15b}$$

$$CD = \mathrm{id}_W \qquad e\delta = \tau\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \tag{10.15c}$$

$$C\delta = 0 \qquad eD = 0 \tag{10.15d}$$

$$(\mathrm{id}_W \otimes C)(\delta \otimes \mathrm{id}_W) = \omega(C \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes \delta) \qquad e(C \otimes \mathrm{id}_W) = \omega e(\mathrm{id}_W \otimes C) \tag{10.15e}$$

$$(\mathrm{id}_W \otimes e)(D \otimes \mathrm{id}_W) = \omega(e \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes D) \qquad (\mathrm{id}_W \otimes D)\delta = \omega(D \otimes \mathrm{id}_W)\delta \tag{10.15f}$$

Moreover, if $\omega \neq 1$, we have $\tau = 2$, and if $\omega = 1$, we have $\tau \neq 1$ and

$$(\mathrm{id}_W \otimes C)(D \otimes \mathrm{id}_W) = (C \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes D) = (1-\tau)^{-1}\,\mathrm{id}_{W^{\otimes 2}} + (\tau-1)^{-1}\delta e + DC \tag{10.15g}$$

$$(\mathrm{id}_W \otimes D)D = (1-\tau)^{-1}(\delta \otimes \mathrm{id}_W) + (\tau-1)^{-1}(\mathrm{id}_W \otimes \delta) + (D \otimes \mathrm{id}_W)D \tag{10.15h}$$

$$C(\mathrm{id}_W \otimes C) = (1-\tau)^{-1}(\mathrm{id}_W \otimes e) + (\tau-1)^{-1}(e \otimes \mathrm{id}_W) + C(C \otimes \mathrm{id}_W) \tag{10.15i}$$

Démonstration. The fusion rules for $SO(3)$ give :

$$W \otimes W \simeq \mathbb{C} \oplus W \oplus W_2^H.$$

Then there exist H-colinear maps e, δ and C satisfying (10.15a), and a scalar $\tau \in \mathbb{C}$ such that $e\delta = \tau\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$. By cosemisimplicity, there exists δ' such that $e\delta' = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ and by Schur's lemma, there exists $\alpha \in \mathbb{C}^*$ such that $\delta' = \alpha\delta$. Hence $\tau \neq 0$. Moreover, any rescaling of e and δ that leaves (10.15a) intact also leaves τ invariant, hence τ only depends on H.

The rest of the proof follows the one of Lemma 10.17 but without Lemma 10.16. □

In the rest of this paper, it seems convenient to distinguish the $SO(3)$-deformations by whether or not $\omega = 1$.

Notation 10.30. Let H be a $SO(3)$-deformation. We say that H is of type $\mathbf{I}_\tau$ if $\omega = 1$, where $\tau \in \mathbb{C}^*$ is determined by H according to Lemma 10.29. Otherwise, we say that H is of type **II** (in that case, we always have $\tau = 2$).

$SO(3)$-deformations of type $\mathbf{I}_\tau$ are close to the compact case :

Proposition 10.31. *Let H be a $SO(3)$-deformation of type $\mathbf{I}_\tau$. Then there exist a finite dimensional, semisimple, measured algebra (A, φ) with $\dim A \geq 4$, and a Hopf algebra morphism $f : A_{\boldsymbol{aut}}(A, \varphi) \to H$ such that $W \subset A$ is a $A_{\boldsymbol{aut}}(A, \varphi)$-subcomodule and $(\mathrm{id}_W \otimes f) \circ \alpha_W = \alpha'_W$, where α_W et α'_W are the coactions on W of $A_{\boldsymbol{aut}}(A, \varphi)$ and H respectively. Moreover, if $\tau \neq -1$, we have (A, φ) homogeneous.*

Démonstration. The construction is essentially the same as in the proof of Theorem 10.1. The only difference is about the semisimplicity of the algebra.

Let A be the H-comodule $\mathbb{C} \oplus W$ with $\dim A \geq 4$. Endow A with the following H-colinear maps : define a product and a unit by

$$(\lambda, v)(\mu, w) = (\lambda\mu + (\tau-1)^{-1}e(v \otimes w), \lambda w + \mu v + C(v \otimes w)), \quad 1_A = (1, 0)$$

and a measure $\varphi : A \to \mathbb{C}$ by $\varphi(\lambda, v) = \lambda$. As in the proof of Theorem 10.1 and using relations (10.15ei), (A, m, u, φ) is a finite dimensional measured algebra.

Consider $\tilde{\delta} : \mathbb{C} \to A \otimes A$ defined by $\tilde{\delta}(1) = 1_A \otimes 1_A + (\tau - 1)\delta(1)$. Let $w \in W \subset A$. Then in $A \otimes A$, we have

$$\begin{aligned}
w\tilde{\delta}(1) &= w \otimes 1 + 1 \otimes (e \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes \delta)(w) + (\tau - 1)(C \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes \delta)(w) \\
&\overset{(10.15a)}{=} w \otimes 1 + 1 \otimes w + (\tau - 1)(C \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_W \otimes \delta)(w) \\
&\overset{(10.15e)}{=} 1 \otimes w + w \otimes 1 + (\tau - 1)(\mathrm{id}_W \otimes C)(\delta \otimes \mathrm{id}_W)(w) \\
&\overset{(10.15a)}{=} 1 \otimes w + (\mathrm{id}_W \otimes e)(\delta \otimes \mathrm{id}_W)(w) \otimes 1 + (\tau - 1)(\mathrm{id}_W \otimes C)(\delta \otimes \mathrm{id}_W)(w) = \tilde{\delta}(1)w.
\end{aligned}$$

Hence for all $a \in A$, we have $a\delta(1) = \delta(1)a \in A \otimes A$. Put $r := (\tau + 1)^{-1}\tilde{\delta(1)}$ so that $m(r) = 1_A$ and

$$s : A \to A \otimes A,\ a \mapsto ar.$$

In view of the previous facts, s is a A-A-bimodule morphism, and $m \circ s = \mathrm{id}_A$, then A is separable and is semisimple.

Then (A, φ) is a finite dimensional, semisimple, measured algebra and there exists a multimatrix $E \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n} GL_{d_\lambda^E}(\mathbb{C})$ such that $(A, \varphi) \simeq (A_E, \mathrm{tr}_E)$. By construction of the structure maps, A is a H-comodule algebra and φ is equivariant, thus by universality, there exists a Hopf algebra morphism $f : A_{\mathbf{aut}}(A, \varphi) \to H$ such that $(\mathrm{id}_W \otimes f) \circ \alpha_A = \alpha'_A$. Finally, $W = \ker(\varphi)$ is a $A_{\mathbf{aut}}(A, \varphi)$-subcomodule of A, and by definition of the coactions on A, we have $(\mathrm{id}_W \otimes f) \circ \alpha_W = \alpha'_W$.

Recalling Remark 10.10, we can compute the quantities $\mathrm{Tr}(E^{-1})$ and $\mathrm{tr}(E_\lambda)$:

- $\varphi(1_A) = 1 = \mathrm{Tr}(E^{-1})$.
- The map
$$\tilde{\varphi} : A \overset{\mathrm{id}_A \otimes \tilde{\delta}}{\to} A \otimes A \otimes A \overset{m \otimes \mathrm{id}_A}{\to} A \otimes A \overset{m}{\to} A \overset{\varphi}{\to} \mathbb{C}$$
is a H-colinear map. Using Schur's lemma, we have $\dim(\mathrm{Hom}_H(A, \mathbb{C})) = 1$, hence there exists $c \in \mathbb{C}$ such that $\tilde{\varphi} = c\varphi$. Let us compute $\tilde{\varphi}(1_A) = \tau + 1$ as in the proof of Theorem 10.1, so $\tilde{\varphi} = (\tau + 1)\varphi$. Comparing with the formula in Remark 10.10, we have $\mathrm{tr}(E_\lambda) = \tau + 1$, for all $1 \le \lambda \le n$. Assuming $\tau \neq -1$, φ is homogeneous.

To summarize, if $\tau \neq -1$, $(A, \varphi) \simeq (A_E, \mathrm{tr}_E)$ with $\mathrm{Tr}(E^{-1}) \neq 0 \neq \mathrm{tr}(E_\lambda) = \mathrm{tr}(E_\mu)$, for all $1 \le \lambda, \mu \le n$, that is, (A, φ) is normalizable by Remark 10.10. According to Remark 10.13, we can assume that (A, φ) is normalized. If $\tau = -1$, we have $(A, \varphi) \simeq (A_E, \mathrm{tr}_E)$ with $\mathrm{Tr}(E^{-1}) \neq 0 = \mathrm{tr}(E_\lambda) = \mathrm{tr}(E_\mu)$, for all $1 \le \lambda, \mu \le n$. □

A consequence of this proposition is the partial classification result :

Théorème 10.32. *Let H be a $SO(3)$-deformation of type $\mathbf{I}_\tau$ such that $\tau \neq -1$. Then there exist a finite dimensional, semisimple, measured algebra (A, φ) with $\dim A \ge 4$, and a Hopf algebra isomorphism $A_{\mathbf{aut}}(A, \varphi) \simeq H$*

Démonstration. Let us denote by $(W_n^H)_{n \in \mathbb{N}}$ the family of simple H-comodules, $W_1^H := W$. According to Proposition 10.31, there exist a normalized algebra (A, φ), with dimension ≥ 4, and a Hopf algebra morphism

$$f : A_{\mathbf{aut}}(A, \varphi) \to H$$

such that $f_*(W^A) \simeq W^H$. According to Theorem 10.2, there exist $q \in \mathbb{C}^*$ and a monoidal equivalence

$$\mathrm{Comod}(A_{\mathbf{aut}}(A, \varphi)) \simeq^{\otimes} \mathrm{Comod}(\mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3))).$$

Let us denote by W_n^A, V_n^A and U_n^A the $A_{\mathbf{aut}}(A,\varphi)$-comodules from Theorem 10.28. If q is generic, then we have $f_*(W_n^A) \simeq W_n^H$, $\forall n \in \mathbb{N}$, so f induces a semi-ring isomorphism $\mathcal{R}^+(A_{\mathbf{aut}}(A,\varphi)) \simeq \mathcal{R}^+(H)$, and then by a standard semi-ring argument $f : A_{\mathbf{aut}}(A,\varphi) \to H$ is a Hopf algebra isomorphism. In the first case where q is not generic, we have $f_*(W_n^A) \simeq W_n^H$, $\forall 1 \leq n \leq N_1 - 1$. So we get :

$$f_*(W_{N_1-1}^A \otimes W_1^A) \simeq W_{N_1-1}^H \otimes W_1^H \simeq W_{N_1-2}^H \oplus W_{N_1-1}^H \oplus W_{N_1}^H,$$

but on the other hand, using the simple filtration, we have :

$$f_*(W_{N_1-1}^A \otimes W_1^A) \simeq W_{N_1-1} \oplus f_*(V_1) \oplus W_{N_1-2} \oplus W_{N_1-1}.$$

This contradicts the uniqueness of the decomposition of a semisimple comodule into a direct sum of simple comodules. In the last case, we have $f_*(U_{2n}^A) \simeq W_n^H$, $\forall 1 \leq n \leq N_1-1$. Then we get :

$$f_*(U_{2(N_1-1)}^A \otimes U_2^A) \simeq W_{N_1-1}^H \otimes W_1^H \simeq W_{N_1-2}^H \oplus W_{N_1-1}^H \oplus W_{N_1}^H,$$

but on the other hand we have :

$$f_*(U_{2(N_1-1)}^A \otimes U_2^A) \simeq W_{N_1-2}^H \oplus f_*(U_1^A \otimes V_1^A) \oplus W_{N_1-2}^H.$$

This also contradicts the uniqueness of the decomposition of a semisimple comodule into a direct sum of simple comodules. Then $A_{\mathbf{aut}}(A,\varphi)$ is cosemisimple, q is generic and f is an isomorphism. $\square$

10.7 Appendix : Proof of Lemma 10.23

We begin by a particular case.

Lemme 10.33. *Let $E, F \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Assume that E_λ is a diagonal matrix for all $\lambda = 1,\dots,n_E$, that F_μ is a lower-triangular matrix for all $\mu = 1,\dots,n_F$, that $\mathrm{Tr}(E^{-1}) = \mathrm{Tr}(F^{-1})$ and $\mathrm{tr}(E_\lambda) = \mathrm{tr}(F_\mu)$ for all λ,μ. Then the algebra $\mathcal{A}(E,F)$ is nonzero.*

Démonstration. We want to apply the diamond Lemma [11], for which we freely use the definitions and notations of [40] (although there are a few misprints there). We have to order the monomials $X_{kl,\mu}^{ij,\lambda}$. We order the set of generators with the following order ($1 \leq \lambda,\nu \leq n_E$, $1 \leq i,j \leq d_\lambda^E$, $1 \leq r,s \leq d_\nu^E$, $1 \leq \mu,\eta \leq n_F$, $1 \leq k,l \leq d_\mu^F$, $1 \leq p,q \leq d_\eta^F$)

$$X_{kl,\mu}^{ij,\lambda} < X_{pq,\eta}^{rs,\nu} \text{ if } \begin{cases} (\lambda,\mu) < (\nu,\eta), \\ (\lambda,\mu) = (\nu,\eta) \text{ and } (i,k) < (r,p), \\ (\lambda,\mu) = (\nu,\eta), (i,k) = (r,p) \text{ and } (j,l) > (s,q). \end{cases}$$

Then order the set of monomials according to their length, and two monomials of the same length are ordered lexicographically.

Now we can write a nice presentation for $\mathcal{A}(E,F)$ ($d_F := d_{n_F}^F, d_E := d_{n_E}^E$) :

$$
(DL)\begin{cases}
X_{ij,\lambda}^{r1,\nu}X_{kl,\mu}^{1s,\nu} = \delta_{\lambda\mu}\delta_{jk}X_{il,\mu}^{rs,\nu} - \sum_{t=2}^{d_\nu^E} X_{ij,\lambda}^{rt,\nu}X_{kl,\mu}^{ts,\nu} & (1)\\
X_{d_Fd_F,n_F}^{ij,\lambda} = \delta_{ij} - \sum_{\mu=1}^{n_F-1}\sum_{k=1}^{d_\mu^F} X_{kk,\mu}^{ij,\lambda} - \sum_{k<d_F} X_{kk,n_F}^{ij,\lambda} & (2)\\
X_{ij,\lambda}^{d_Ed_E,n_E} = E_{d_Ed_E,n_E}\big(F_{ij,\lambda}^{-1} - \sum_{\mu=1}^{n_E-1}\sum_{t=1}^{d_\mu^E} E_{tt,\mu}^{-1}X_{ij,\lambda}^{tt,\mu} - \sum_{t<d_E} E_{tt,n_E}^{-1}X_{ij,\lambda}^{tt,n_E}\big) & (3)\\
X_{i1,\lambda}^{kp,\mu}X_{1j,\lambda}^{ql,\nu} = F_{11,\lambda}^{-1}\big(\delta_{\mu\nu}E_{pq,\mu}X_{ij,\lambda}^{kl,\mu} - \sum_{(n,m)\neq(1,1)} F_{nm,\lambda}X_{in,\lambda}^{kp,\mu}X_{mj,\lambda}^{ql,\nu}\big) & (4)
\end{cases}
$$

Then we have the following inclusion ambiguities :

$(X_{i1,\lambda}^{r1,\nu}X_{1j,\lambda}^{1s,\nu}; X_{i1,\lambda}^{r1,\nu}X_{1j,\lambda}^{1s,\nu})$ $\quad (X_{ij,\lambda}^{r1,\nu}X_{d_Fd_F,n_F}^{1s,\nu}; X_{d_Fd_F,n_F}^{1s,\nu})$ $\quad (X_{d_Fd_F,n_F}^{r1,\nu}, X_{d_Fd_F,n_F}^{r1,\nu}X_{ij,\lambda}^{1s,\nu})$

$(X_{i1,\lambda}^{d_Ed_E,n_E}; X_{i1,\lambda}^{d_Ed_E,n_E}X_{1j,\lambda}^{ql,\nu})$ $\quad (X_{i1,\lambda}^{kp,\mu}X_{1j,\lambda}^{d_Ed_E,n_E}; X_{1j,\lambda}^{d_Ed_E,n_E})$ $\quad (X_{d_Fd_F,n_F}^{d_Ed_E,n_E}; X_{d_Fd_F,n_F}^{d_Ed_E,n_E})$

$(X_{ij,\lambda}^{r1,\nu}X_{kl,\mu}^{11,\nu}; X_{kl,\mu}^{11,\nu}X_{pq,\tau}^{1s,\nu})$ $\quad (X_{i1,\lambda}^{kp,\mu}X_{11,\lambda}^{ql,\nu}; X_{11,\lambda}^{ql,\nu}X_{1r,\lambda}^{uv,\tau})$

and the following overlap ambiguities :

$(X_{ij,\lambda}^{r1,\nu}X_{k1,\mu}^{1s,\nu}; X_{k1,\mu}^{1s,\nu}X_{1l,\mu}^{pq,\eta})$ $\quad (X_{i1,\lambda}^{kl,\mu}X_{1j,\lambda}^{r1,\nu}; X_{1j,\lambda}^{r1,\nu}X_{pq,\eta}^{1s,\nu})$

Let us show that all this ambiguities are resolvable (recall that "$\rightarrow$" means we perform a reduction) :

Let us begin by the ambiguity $(X_{ij,\lambda}^{r1,\nu}X_{kl,\mu}^{11,\nu}; X_{kl,\mu}^{11,\nu}X_{pq,\tau}^{1s,\nu})$. On the first hand, we have :

$$
\delta_{\lambda\mu}\delta_{jk}X_{il,\mu}^{r1,\nu}X_{pq,\tau}^{1s,\nu} - \sum_{t=2}^{d_\nu^E} X_{ij,\lambda}^{rt,\nu}X_{kl,\mu}^{t1,\nu}X_{pq,\tau}^{1s,\nu}
$$

$$
\overset{(1)}{\rightarrow}\delta_{\lambda\mu}\delta_{\lambda\tau}\delta_{jk}\delta_{lp}X_{iq,\mu}^{rs,\nu} - \delta_{\lambda\mu}\delta_{jk}\sum_{u=2}^{d_\nu^E} X_{il,\mu}^{ru,\nu}X_{pq,\tau}^{us,\nu} - \delta_{\mu\tau}\delta_{lp}\sum_{t=2}^{d_\nu^E} X_{ij,\lambda}^{rt,\nu}X_{kq,\mu}^{ts,\nu} + \sum_{t,u} X_{ij,\lambda}^{rt,\nu}X_{kl,\mu}^{tu,\nu}X_{pq,\tau}^{us,\nu}
$$

and on the other hand, we have :

$$
\delta_{\mu\tau}\delta_{lp}X_{ij,\lambda}^{r1,\nu}X_{kq,\mu}^{1s,\nu} - \sum_{u=2}^{d_\nu^E} X_{ij,\lambda}^{r1,\nu}X_{kl,\mu}^{1u,\nu}X_{pq,\tau}^{us,\nu}
$$

$$
\overset{(1)}{\rightarrow}\delta_{\lambda\mu}\delta_{\lambda\tau}\delta_{jk}\delta_{lp}X_{iq,\mu}^{rs,\nu} - \delta_{\lambda\mu}\delta_{jk}\sum_{u=2}^{d_\nu^E} X_{il,\mu}^{ru,\nu}X_{pq,\tau}^{us,\nu} - \delta_{\mu\tau}\delta_{lp}\sum_{t=2}^{d_\nu^E} X_{ij,\lambda}^{rt,\nu}X_{kq,\mu}^{ts,\nu} + \sum_{t,u} X_{ij,\lambda}^{rt,\nu}X_{kl,\mu}^{tu,\nu}X_{pq,\tau}^{us,\nu}
$$

The ambiguity $(X_{i1,\lambda}^{kp,\mu}X_{11,\lambda}^{ql,\nu}; X_{11,\lambda}^{ql,\nu}X_{1r,\lambda}^{uv,\tau})$ is resolvable by the same kind of computations.

Let us show that the ambiguity $(X_{i1,\lambda}^{r1,\nu}X_{1j,\lambda}^{1s,\nu}; X_{i1,\lambda}^{r1,\nu}X_{1j,\lambda}^{1s,\nu})$ is resolvable. On the first hand, we have :

$$F_{11,\lambda}^{-1}\big(-\sum_{(n,m)\neq(1,1)} F_{nm,\lambda}X_{in,\lambda}^{r1,\nu}X_{mj,\lambda}^{1s,\nu}+E_{11,\nu}X_{ij,\lambda}^{rs,\nu}\big)$$

$$\overset{(2)}{\to}F_{11,\lambda}^{-1}\big(-\sum_{(n,m)\neq(1,1)} F_{nm,\lambda}\big(-\sum_{t=2}^{d_\nu^E}X_{in,\lambda}^{rt,\nu}X_{mj,\lambda}^{ts,\nu}+\delta_{nm}X_{ij,\lambda}^{rs,\nu}\big)+E_{11,\nu}X_{ij,\lambda}^{rs,\nu}\big)$$

$$=F_{11,\lambda}^{-1}\big(\sum_{(n,m)\neq(1,1)}\sum_{t=2}^{d_\nu^E} F_{nm,\lambda}X_{in,\lambda}^{rt,\nu}X_{mj,\lambda}^{ts,\nu}-(\sum_{(n,m)\neq(1,1)}\delta_{nm}F_{nm,\lambda})X_{ij,\lambda}^{rs,\nu}\big)+E_{11,\nu}X_{ij,\lambda}^{rs,\nu}\big)$$

$$=F_{11,\lambda}^{-1}\big(\sum_{(n,m)\neq(1,1)}\sum_{t=2}^{d_\nu^E} F_{nm,\lambda}X_{in,\lambda}^{rt,\nu}X_{mj,\lambda}^{ts,\nu}+(F_{11,\lambda}+E_{11,\nu}-\mathrm{tr}(F_\lambda))X_{ij,\lambda}^{rs,\nu}\big)$$

and on the second hand, we have :

$$-\sum_{t=2}^{d_\nu^E}X_{i1,\lambda}^{rt,\nu}X_{1j,\lambda}^{ts,\nu}+X_{ij,\lambda}^{rs,\nu}$$

$$\overset{(4)}{\to}F_{11,\lambda}^{-1}\big(\sum_{t=2}^{d_\nu^E}(\sum_{(n,m)\neq(1,1)} F_{nm,\lambda}X_{in,\lambda}^{rt,\nu}X_{mj,\lambda}^{ts,\nu}+E_{tt,\nu}X_{ij,\lambda}^{rs,\nu})+F_{11,\lambda}X_{ij,\lambda}^{rs,\nu}\big)$$

$$=F_{11,\lambda}^{-1}\big(\sum_{t=2}^{d_\nu^E}\sum_{(n,m)\neq(1,1)} F_{nm,\lambda}X_{in,\lambda}^{rt,\nu}X_{mj,\lambda}^{ts,\nu}+(F_{11,\lambda}+E_{11,\nu}-\mathrm{tr}(E_\nu))X_{ij,\lambda}^{rs,\nu}\big)$$

$$=F_{11,\lambda}^{-1}\big(\sum_{t=2}^{d_\nu^E}\sum_{(n,m)\neq(1,1)} F_{nm,\lambda}X_{in,\lambda}^{rt,\nu}X_{mj,\lambda}^{ts,\nu}+(F_{11,\lambda}+E_{11,\nu}-\mathrm{tr}(F_\lambda))X_{ij,\lambda}^{rs,\nu}\big)$$

because $\mathrm{tr}(E_\nu)=\mathrm{tr}(F_\lambda)$ by assumption.

Let us show that the ambiguity $(X_{ij,\lambda}^{r1,\nu}X_{d_Fd_F,n_F}^{1s,\nu};X_{d_Fd_F,n_F}^{1s,\nu})$ is resolvable. On the first hand we have:

$$-\sum_{\mu=1}^{n_F-1}\sum_{k=1}^{d_\mu^F}X_{ij,\lambda}^{r1,\nu}X_{kk,\mu}^{1s,\nu}-\sum_{k<d_F}X_{ij,\lambda}^{r1,\nu}X_{kk,n_F}^{1s,\nu}+\delta_{1s}X_{ij,\lambda}^{r1,\nu}$$

$$\overset{(1)}{\to}\sum_{\mu=1}^{n_F-1}\sum_{k=1}^{d_\mu^F}(\sum_{t=2}^{d_\nu^E}X_{ij,\lambda}^{rt,\nu}X_{kk,\mu}^{ts,\nu}-\delta_{\lambda\mu}\delta_{jk}X_{ik,\lambda}^{rs,\nu})+\sum_{k<d_F}(\sum_{t=2}^{d_\nu^E}X_{ij,\lambda}^{rt,\nu}X_{kk,n_F}^{ts,\nu}-\delta_{\lambda n_F}\delta_{jk}X_{ik,n_F}^{rs,\nu})+\delta_{1s}X_{ij,\lambda}^{r1,\nu}$$

$$=\sum_{\mu=1}^{n_F-1}\sum_{k=1}^{d_\mu^F}\sum_{t=2}^{d_\nu^E}X_{ij,\lambda}^{rt,\nu}X_{kk,\mu}^{ts,\nu}+\sum_{k<d_F}\sum_{t=2}^{d_\nu^E}X_{ij,\lambda}^{rt,\nu}X_{kk,n_F}^{ts,\nu}-\sum_{\mu=1}^{n_F-1}\sum_{k=1}^{d_\mu^F}\delta_{\lambda\mu}\delta_{jk}X_{ik,\lambda}^{rs,\nu}-\sum_{k<d_F}\delta_{\lambda n_F}\delta_{jk}X_{ik,n_F}^{rs,\nu}$$
$$+\delta_{1s}X_{ij,\lambda}^{r1,\nu}$$

$$=\sum_{\mu=1}^{n_F-1}\sum_{k=1}^{d_\mu^F}\sum_{t=2}^{d_\nu^E}X_{ij,\lambda}^{rt,\nu}X_{kk,\mu}^{ts,\nu}+\sum_{k<d_F}\sum_{t=2}^{d_\nu^E}X_{ij,\lambda}^{rt,\nu}X_{kk,n_F}^{ts,\nu}-\sum_{\mu=1}^{n_F}\sum_{k=1}^{d_\mu^F}\delta_{\lambda\mu}\delta_{jk}X_{ik,\lambda}^{rs,\nu}$$
$$+\delta_{\lambda n_F}\delta_{jd_F}X_{id_F,n_F}^{rs,\nu}+\delta_{1s}X_{ij,\lambda}^{r1,\nu}$$

$$=\sum_{\mu=1}^{n_F-1}\sum_{k=1}^{d_\mu^F}\sum_{t=2}^{d_\nu^E}X_{ij,\lambda}^{rt,\nu}X_{kk,\mu}^{ts,\nu}+\sum_{k<d_F}\sum_{t=2}^{d_\nu^E}X_{ij,\lambda}^{rt,\nu}X_{kk,n_F}^{ts,\nu}-\sum_{t=2}^{d_\nu^E}\delta_{ts}X_{ij,\lambda}^{rt,\nu}+\delta_{\lambda n_F}\delta_{jd_F}X_{id_F,n_F}^{rs,\nu}$$

On the other hand, we have :

$$
\begin{aligned}
& -\sum_{t=2}^{d_\nu^E} X_{ij,\lambda}^{rt,\nu} X_{d_F d_F,n_F}^{ts,\nu} + \delta_{\lambda n_F}\delta_{j d_F} X_{i d_F,n_F}^{rs,\nu} \\
\xrightarrow{(2)} & \sum_{t=2}^{d_\nu^E} X_{ij,\lambda}^{rt,\nu} \Big(\sum_{\mu=1}^{n_F-1} \sum_{k=1}^{d_\mu^F} X_{kk,\mu}^{ts,\nu} + \sum_{k<d_F} X_{kk,n_F}^{ts,\nu} - \delta_{ts} \Big) + \delta_{\lambda n_F}\delta_{j d_F} X_{i d_F,n_F}^{rs,\nu} \\
= & \sum_{t=2}^{d_\nu^E} \sum_{\mu=1}^{n_F-1} \sum_{k=1}^{d_\mu^F} X_{ij,\lambda}^{rt,\nu} X_{kk,\mu}^{ts,\nu} + \sum_{t=2}^{d_\nu^E} \sum_{k<d_F} X_{ij,\lambda}^{rt,\nu} X_{kk,n_F}^{ts,\nu} - \sum_{t=2}^{d_\nu^E} \delta_{ts} X_{ij,\lambda}^{rt,\nu} + \delta_{\lambda n_F}\delta_{j d_F} X_{i d_F,n_F}^{rs,\nu}
\end{aligned}
$$

The ambiguity $(X_{d_F d_F,n_F}^{r1,\nu}, X_{d_F d_F,n_F}^{r1,\nu} X_{ij,\lambda}^{1s,\nu})$ is resolvable by the same kind of computations.

Let us show that the ambiguity $(X_{i1,\lambda}^{d_E d_E,n_E}; X_{i1,\lambda}^{d_E d_E,n_E} X_{1j,\lambda}^{ql,\nu})$ is resolvable. On the first hand we have:

$$
\begin{aligned}
& F_{11,\lambda}^{-1}\Big(- \sum_{(n,m)\neq(1,1)} F_{nm,\lambda} X_{in,\lambda}^{d_E d_E,n_E} X_{mj,\lambda}^{ql,\nu} + \delta_{n_E \nu} E_{d_E q,\nu} X_{ij,\lambda}^{d_E l,\nu} \Big) \\
\xrightarrow{(3)} & F_{11,\lambda}^{-1} E_{d_E d_E,n_E} \Big(\delta_{n_E\nu}\delta_{d_E q} X_{ij,\lambda}^{d_E l,\nu} + \sum_{(n,m)\neq(1,1)} F_{nm,\lambda} \Big(\sum_{\mu=1}^{n_E-1} \sum_{t=1}^{d_\mu^E} E_{tt,\mu}^{-1} X_{in,\lambda}^{tt,\mu} \\
& + \sum_{t<d_E} E_{tt,n_E}^{-1} X_{in,\lambda}^{tt,n_E} - F_{in,\lambda}^{-1} \Big) X_{mj,\lambda}^{ql,\nu} \Big) \\
= & F_{11,\lambda}^{-1} E_{d_E d_E,n_E} \Big(\delta_{n_E\nu}\delta_{d_E q} X_{ij,\lambda}^{d_E l,\nu} + \sum_{(n,m)\neq(1,1)} \sum_{\mu=1}^{n_E-1} \sum_{t=1}^{d_\mu^E} F_{nm,\lambda} E_{tt,\mu}^{-1} X_{in,\lambda}^{tt,\mu} \\
& + \sum_{(n,m)\neq(1,1)} \sum_{t<d_E} F_{nm,\lambda} E_{tt,n_E}^{-1} X_{in,\lambda}^{tt,n_E} - \sum_{(n,m)\neq(1,1)} F_{nm,\lambda} F_{in,\lambda}^{-1} X_{mj,\lambda}^{ql,\nu} \Big)
\end{aligned}
$$

and on the other hand :

$$E_{d_Ed_E,n_E}\big(F^{-1}_{i1,\lambda}X^{ql,\nu}_{1j,\lambda}-\sum_{\mu=1}^{n_E-1}\sum_{t=1}^{d^E_\mu}E^{-1}_{tt,\mu}X^{tt,\mu}_{i1,\lambda}X^{ql,\nu}_{1j,\lambda}-\sum_{t<d_E}E^{-1}_{tt,n_E}X^{tt,n_E}_{i1,\lambda}X^{ql,\nu}_{1j,\lambda}\big)$$

$$\overset{(4)}{\to}E_{d_Ed_E,n_E}F^{-1}_{11,\lambda}\big(F_{11,\lambda}F^{-1}_{i1,\lambda}X^{ql,\nu}_{1j,\lambda}+\sum_{\mu=1}^{n_E-1}\sum_{t=1}^{d^E_\mu}E^{-1}_{tt,\mu}(\sum_{(n,m)\neq(1,1)}F_{nm,\lambda}X^{tt,\mu}_{in,\lambda}X^{ql,\nu}_{mj,\lambda}+\delta_{\mu\nu}E_{kq,\nu}X^{tl,\nu}_{ij,\lambda})$$
$$+\sum_{t<d_E}E^{-1}_{tt,n_E}(\sum_{(n,m)\neq(1,1)}F_{nm,\lambda}X^{tt,n_E}_{in,\lambda}X^{ql,\nu}_{mj,\lambda}+\delta_{n_E\nu}E_{tq,n_E}X^{tl,n_E}_{ij,\lambda}\big)$$
$$=E_{d_Ed_E,n_E}F^{-1}_{11,\lambda}\big(F_{11,\lambda}F^{-1}_{i1,\lambda}X^{ql,\nu}_{1j,\lambda}-\sum_{\mu=1}^{n_E-1}\sum_{t=1}^{d^E_\mu}\delta_{\nu\lambda}E^{-1}_{tt,\mu}E_{tq,\nu}X^{tl,\nu}_{ij,\lambda}-\sum_{t<d_E}\delta_{n_E\nu}E^{-1}_{tt,n_E}E_{tq,\nu}X^{tl,n_E}_{ij,\lambda}$$
$$+\sum_{\mu=1}^{n_E-1}\sum_{t=1}^{d^E_\mu}\sum_{(n,m)\neq(1,1)}E^{-1}_{tt,\mu}F_{nm,\lambda}X^{tt,\mu}_{in,\lambda}X^{ql,\nu}_{mj,\lambda}+\sum_{t<d_E}\sum_{(n,m)\neq(1,1)}E^{-1}_{tt,n_E}F_{nm,\lambda}X^{tt,n_E}_{in,\lambda}X^{ql,\nu}_{mj,\lambda}$$
$$=F^{-1}_{11,\lambda}E_{d_Ed_E,n_E}\big(\delta_{n_E\nu}\delta_{d_Eq}X^{d_El,\nu}_{ij,\lambda}+\sum_{(n,m)\neq(1,1)}\sum_{\mu=1}^{n_E-1}\sum_{t=1}^{d^E_\mu}F_{nm,\lambda}E^{-1}_{tt,\mu}X^{tt,\mu}_{in,\lambda}$$
$$+\sum_{(n,m)\neq(1,1)}\sum_{t<d_E}F_{nm,\lambda}E^{-1}_{tt,n_E}X^{tt,\mu}_{in,n_E}-\sum_{(n,m)\neq(1,1)}F_{nm,\lambda}F^{-1}_{in,\lambda}X^{ql,\nu}_{mj,\lambda}\big)$$

The ambiguity $(X^{kp,\mu}_{i1,\lambda}X^{d_Ed_E,n_E}_{1j,\lambda};X^{d_Ed_E,n_E}_{1j,\lambda})$ is resolvable by the same kind of computations.

Let us show that the ambiguity $(X^{d_Ed_E,n_E}_{d_Fd_F,n_F};X^{d_Ed_E,n_E}_{d_Fd_F,n_F})$ is resolvable. On the first hand we have:

$$-\sum_{\mu=1}^{n_F-1}\sum_{k=1}^{d^F_\mu}X^{d_Ed_E,n_E}_{kk,\mu}-\sum_{k<d_F}X^{d_Ed_E,n_E}_{kk,n_F}+1$$

$$\overset{(3)}{\to}E_{d_Ed_E,n_E}\big(-\sum_{\mu=1}^{n_F-1}\sum_{k=1}^{d^F_\mu}(-\sum_{\lambda=1}^{n_E-1}\sum_{t=1}^{d^E_\lambda}E^{-1}_{tt,\lambda}X^{tt,\lambda}_{kk,\mu}-\sum_{t<d_E}E^{-1}_{tt,n_E}X^{tt,n_E}_{kk,\mu}+F^{-1}_{kk,\mu})$$
$$-\sum_{k<d_F}(-\sum_{\lambda=1}^{n_E-1}\sum_{t=1}^{d^E_\lambda}E^{-1}_{tt,\lambda}X^{tt,\lambda}_{kk,n_F}-\sum_{t<d_E}E^{-1}_{tt,n_E}X^{tt,n_E}_{kk,n_F}+F^{-1}_{kk,n_F})+E^{-1}_{d_Ed_E,n_E}\big)$$
$$=E_{d_Ed_E,n_E}\big(\sum_{\mu=1}^{n_F-1}\sum_{k=1}^{d^F_\mu}\sum_{\lambda=1}^{n_E-1}\sum_{t=1}^{d^E_\lambda}E^{-1}_{tt,\lambda}X^{tt,\lambda}_{kk,\mu}+\sum_{\mu=1}^{n_F-1}\sum_{k=1}^{d^F_\mu}\sum_{t<d_E}E^{-1}_{tt,n_E}X^{tt,n_E}_{kk,\mu}-\sum_{\mu=1}^{n_F-1}\operatorname{tr}(F^{-1}_\mu)$$
$$+\sum_{k<d_F}\sum_{\lambda=1}^{n_E-1}\sum_{t=1}^{d^E_\lambda}E^{-1}_{tt,\lambda}X^{tt,\lambda}_{kk,n_F}-\sum_{k<d_F}\sum_{t<d_E}E^{-1}_{tt,n_E}X^{tt,n_E}_{kk,n_F}+F^{-1}_{d_Fd_F,n_F}-\operatorname{tr}(F^{-1}_{n_F})+E^{-1}_{d_Ed_E,n_E}\big)$$
$$=E_{d_Ed_E,n_E}\big(\sum_{\mu=1}^{n_F-1}\sum_{k=1}^{d^F_\mu}\sum_{\lambda=1}^{n_E-1}\sum_{t=1}^{d^E_\lambda}E^{-1}_{tt,\lambda}X^{tt,\lambda}_{kk,\mu}+\sum_{\mu=1}^{n_F-1}\sum_{k=1}^{d^F_\mu}\sum_{t<d_E}E^{-1}_{tt,n_E}X^{tt,n_E}_{kk,\mu}+\sum_{k<d_F}\sum_{\lambda=1}^{n_E-1}\sum_{t=1}^{d^E_\lambda}E^{-1}_{tt,\lambda}X^{tt,\lambda}_{kk,n_F}$$
$$-\sum_{k<d_F}\sum_{t<d_E}E^{-1}_{tt,n_E}X^{tt,n_E}_{kk,n_F}+F^{-1}_{d_Fd_F,n_F}+E^{-1}_{d_Ed_E,n_E}-\operatorname{Tr}(F^{-1})\big)$$

and on the other hand :

$$
\begin{aligned}
&E_{d_Ed_E,n_E}\big(-\sum_{\lambda=1}^{n_E-1}\sum_{t=1}^{d^E_\mu}E^{-1}_{tt,\lambda}X^{tt,\lambda}_{d_Fd_F,n_F}-\sum_{t<d_E}E^{-1}_{tt,n_E}X^{tt,n_E}_{d_Fd_F,n_F}+F^{-1}_{d_Fd_F,n_F}\big)\\
\xrightarrow{(2)}&E_{d_Ed_E,n_E}\big(-\sum_{\lambda=1}^{n_E-1}\sum_{t=1}^{d^E_\mu}E^{-1}_{tt,\lambda}(-\sum_{\mu=1}^{n_F-1}\sum_{k=1}^{d^F_\mu}X^{tt,\lambda}_{kk,\mu}-\sum_{k<d_F}X^{tt,\lambda}_{kk,n_F}+1)\\
&-\sum_{t<d_E}E^{-1}_{tt,n_E}(-\sum_{\mu=1}^{n_F-1}\sum_{k=1}^{d^F_\mu}X^{tt,n_E}_{kk,\mu}-\sum_{k<d_F}X^{tt,n_E}_{kk,n_F}+1)+F^{-1}_{d_Fd_F,n_F}\big)\\
=&E_{d_Ed_E,n_E}\big(\sum_{\mu=1}^{n_F-1}\sum_{k=1}^{d^F_\mu}\sum_{\lambda=1}^{n_E-1}\sum_{t=1}^{d^E_\mu}E^{-1}_{tt,\lambda}X^{tt,\lambda}_{kk,\mu}+\sum_{\mu=1}^{n_F-1}\sum_{k=1}^{d^F_\mu}\sum_{t<d_E}E^{-1}_{tt,n_E}X^{tt,n_E}_{kk,\mu}+\sum_{k<d_F}\sum_{\lambda=1}^{n_E-1}\sum_{t=1}^{d^E_\mu}E^{-1}_{tt,\lambda}X^{tt,\lambda}_{kk,n_F}\\
&-\sum_{k<d_F}\sum_{t<d_E}E^{-1}_{tt,n_E}X^{tt,n_E}_{kk,n_F}+F^{-1}_{d_Fd_F,n_F}+E^{-1}_{d_Ed_E,n_E}-\mathrm{Tr}(E^{-1})\big)\\
=&E_{d_Ed_E,n_E}\big(\sum_{\mu=1}^{n_F-1}\sum_{k=1}^{d^F_\mu}\sum_{\lambda=1}^{n_E-1}\sum_{t=1}^{d^E_\mu}E^{-1}_{tt,\lambda}X^{tt,\lambda}_{kk,\mu}+\sum_{\mu=1}^{n_F-1}\sum_{k=1}^{d^F_\mu}\sum_{t<d_E}E^{-1}_{tt,n_E}X^{tt,n_E}_{kk,\mu}+\sum_{k<d_F}\sum_{\lambda=1}^{n_E-1}\sum_{t=1}^{d^E_\mu}E^{-1}_{tt,\lambda}X^{tt,\lambda}_{kk,n_F}\\
&-\sum_{k<d_F}\sum_{t<d_E}E^{-1}_{tt,n_E}X^{tt,n_E}_{kk,n_F}+F^{-1}_{d_Fd_F,n_F}+E^{-1}_{d_Ed_E,n_E}-\mathrm{Tr}(F^{-1})\big)
\end{aligned}
$$

because $\mathrm{Tr}(E^{-1})=\mathrm{Tr}(F^{-1})$ by assumption.

Now, let us show that the ambiguity $(X^{r1,\nu}_{ij,\lambda}X^{1s,\nu}_{k1,\mu};X^{1s,\nu}_{k1,\mu}X^{pq,\eta}_{1l,\mu})$ is resolvable. On the first hand we have:

$$
\begin{aligned}
&F^{-1}_{11,\mu}\big(-\sum_{(n,m)\neq(1,1)}F_{nm,\mu}X^{r1,\nu}_{ij,\lambda}X^{1s,\nu}_{kn,\mu}X^{pq,\eta}_{ml,\mu}+\delta_{\nu\eta}E_{sp,\nu}X^{r1,\nu}_{ij,\lambda}X^{1q,\nu}_{kl,\mu}\big)\\
\xrightarrow{(1)}&F^{-1}_{11,\mu}\big(\sum_{(n,m)\neq(1,1)}F_{nm,\mu}(\sum_{t=2}^{d^E_\nu}X^{rt,\nu}_{ij,\lambda}X^{tq,\nu}_{kl,\mu}-\delta_{\lambda\mu}\delta_{jk}X^{rs,\nu}_{in,\mu})X^{pq,\eta}_{ml,\mu}\\
&-\delta_{\nu\eta}E_{sp,\nu}(\sum_{t=2}^{d^E_\nu}X^{rt,\nu}_{ij,\lambda}X^{tq,\nu}_{kl,\mu}-\delta_{\lambda\mu}\delta_{jk}X^{rq,\nu}_{il,\mu})\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&F^{-1}_{11,\mu}\big(\delta_{\nu\eta}\delta_{\lambda\mu}\delta_{jk}E_{sp,\nu}X^{rq,\nu}_{il,\mu}-\delta_{\nu\eta}E_{sp,\nu}\sum_{t=2}^{d^E_\nu}X^{rt,\nu}_{ij,\lambda}X^{tq,\nu}_{kl,\mu}\\
&-\delta_{\lambda\mu}\delta_{jk}\sum_{(n,m)\neq(1,1)}F_{nm,\mu}X^{rs,\nu}_{in,\mu}X^{pq,\eta}_{ml,\mu}+\sum_{(n,m)\neq(1,1)}\sum_{t=2}^{d^E_\nu}F_{nm,\mu}X^{rt,\nu}_{ij,\lambda}X^{ts,\nu}_{kn,\mu}X^{pq,\eta}_{ml,\mu}
\end{aligned}
$$

And on the other hand, we have :

$$\delta_{\lambda\mu}\delta_{jk}X_{i1,\mu}^{rs,\nu}X_{1l,\mu}^{pq,\eta} - \sum_{t=2}^{d_\nu^E} X_{ij,\lambda}^{rt,\nu}X_{k1,\mu}^{ts,\nu}X_{1l,\mu}^{pq,\eta}$$

$$\xrightarrow{(4)}\delta_{\lambda\mu}\delta_{jk}F_{11,\mu}^{-1}(\sum_{(n,m)\neq(1,1)} F_{nm,\mu}X_{in,\lambda}^{rs,\nu}X_{ml,\mu}^{pq,\eta} + \delta_{\nu\eta}E_{sp,\nu}X_{il,\mu}^{rq,\nu})$$

$$+ F_{11,\mu}^{-1}(\sum_{t=2}^{d_\nu^E}\sum_{(n,m)\neq(1,1)} F_{nm,\mu}X_{ij,\lambda}^{rt,\nu}X_{kn,\mu}^{ts,\nu}X_{ml,\mu}^{pq,\eta} + \delta_{\nu\eta}E_{sp,\nu}X_{ij,\lambda}^{rt,\nu}X_{kl,\mu}^{tq,\nu})$$

$$=F_{11,\mu}^{-1}\big(\delta_{\nu\eta}\delta_{\lambda\mu}\delta_{jk}E_{sp,\nu}X_{il,\mu}^{rq,\nu} - \delta_{\nu\eta}E_{sp,\nu}\sum_{t=2}^{d_\nu^E} X_{ij,\lambda}^{rt,\nu}X_{kl,\mu}^{tq,\nu}$$

$$- \delta_{\lambda\mu}\delta_{jk}\sum_{(n,m)\neq(1,1)} F_{nm,\mu}X_{in,\mu}^{rs,\nu}X_{ml,\mu}^{pq,\eta} + \sum_{(n,m)\neq(1,1)}\sum_{t=2}^{d_\nu^E} F_{nm,\mu}X_{ij,\lambda}^{rt,\nu}X_{kn,\mu}^{ts,\nu}X_{ml,\mu}^{pq,\eta}$$

The last ambiguity $(X_{i1,\lambda}^{kl,\mu}X_{1j,\lambda}^{r1,\nu}; X_{1j,\lambda}^{r1,\nu}X_{pq,\eta}^{1s,\nu})$ is resolvable by the same kind of computations.

Then all the ambiguities are resolvable. According to the diamond lemma, the set of reduced monomials forms a linear basis of $\mathcal{A}(E,F)$. In particular, the algebra $\mathcal{A}(E,F)$ is nonzero. □

We have the following isomorphism :

Lemme 10.34. *Let $E, P \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n_E} GL_{d_\lambda^E}(\mathbb{C})$, $F, Q \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n_F} GL_{d_\lambda^F}(\mathbb{C})$. Then the algebras $\mathcal{A}(E,F)$ and $\mathcal{A}(PEP^{-1}, QFQ^{-1})$ are isomorphic.*

Démonstration. Let us denote by $Y_{ij,\lambda}^{kl,\mu}$ the generators of $\mathcal{A}(PEP^{-1}, QFQ^{-1})$. They satisfy the relations :

$$\sum_{q=1}^{d_\nu^E} Y_{ij,\lambda}^{rq,\nu}Y_{kl,\mu}^{qs,\nu} = \delta_{\lambda\mu}\delta_{jk}Y_{il,\mu}^{rs,\nu}, \qquad \sum_{\mu=1}^{n_F}\sum_{k=1}^{d_\mu^F} Y_{kk,\mu}^{ij,\lambda} = \delta_{ij},$$

$$\sum_{\mu=1}^{n_E}\sum_{k=1}^{d_\mu^E}(PEP^{-1})_{kl,\mu}^{-1}Y_{ij,\lambda}^{kl,\mu} = (QFQ^{-1})_{ij,\lambda}^{-1}, \quad \sum_{r,s=1}^{d_\lambda^F}(QFQ^{-1})_{rs,\lambda}Y_{ir,\lambda}^{kp,\mu}Y_{sj,\lambda}^{ql,\nu} = \delta_{\mu\nu}(PEP^{-1})_{pq,\mu}Y_{ij,\lambda}^{kl,\mu}.$$

This ensures the existence of an algebra morphism $f : \mathcal{A}(E,F) \to \mathcal{A}(PEP^{-1}, QFQ^{-1})$ by setting

$$f(X_{ij,\lambda}^{kl,\mu}) = \sum_{r,s=1}^{d_\mu^E}\sum_{u,v=1}^{d_\lambda^F} P_{uk,\mu}P_{lv,\mu}^{-1}Y_{rs,\lambda}^{uv,\mu}Q_{ir,\lambda}^{-1}Q_{sj,\lambda}.$$

The inverse map is given by

$$f^{-1}(Y_{ij,\lambda}^{kl,\mu}) = \sum_{r,s=1}^{d_\lambda^F}\sum_{u,v=1}^{d_\mu^E} P_{uk,\mu}^{-1}P_{lv,\mu}X_{rs,\lambda}^{uv,\mu}Q_{ir,\lambda}Q_{sj,\lambda}^{-1}.$$

□

We can now prove Lemma 10.23.

Démonstration. Let $E \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n_E} GL_{d_\lambda^E}(\mathbb{C})$, $F \in \bigoplus_{\mu=1}^{n_F} GL_{d_\mu^F}(\mathbb{C}) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ be such that $\mathrm{Tr}(E^{-1}) = \mathrm{Tr}(F^{-1})$ and $\mathrm{tr}(E_\lambda) = \mathrm{tr}(F_\mu)$ for all λ, μ. According to the previous lemma, let $P \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n_E} GL_{d_\lambda^E}(\mathbb{C})$ and $Q \in \bigoplus_{\mu=1}^{n_F} GL_{d_\mu^F}(\mathbb{C})$ be such that PEP^{-1} and QFQ^{-1} are lower-triangular and let $M \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n_E} GL_{d_\lambda^E}(\mathbb{C})$ be diagonal such that $\mathrm{Tr}(E^{-1}) = \mathrm{Tr}(M^{-1})$ and $\mathrm{tr}(E_\lambda) = \mathrm{tr}(M_\mu)$ for all λ, μ. According to Lemma 10.33, the algebra $\mathcal{A}(M, QFQ^{-1})$ is nonzero, and so is $\mathcal{A}(M, F)$. According to [15], Proposition 2.15, $\mathcal{A}(E, F)$ is nonzero. $\square$

Remarque 10.35. We could have defined a bigger cogroupoid $\widehat{\mathcal{A}}$ such that $\mathrm{Ob}(\widehat{\mathcal{A}}) = \{E \in \bigoplus_{\lambda=1}^{n_E} GL_{d_\lambda^E}(\mathbb{C})\}$. In that case, $F = (F_1, \ldots, F_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ is normalized if and only if $F_1 = \cdots = F_n = f$, and $A_{\mathbf{aut}}(A_F, \mathrm{tr}_F) = A_{\mathbf{aut}}(C(X_n), \psi)$ where $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$. The previous proof no longer works because the relations lead to more ambiguities, which are no longer resolvable.

Quatrième partie

Le centre de l'algèbre de Hopf associée à une forme bilinéaire non-dégénérée

Chapitre 11

Le centre de $\mathcal{B}(E)$

11.1 Le groupe quantique d'une application bilinéaire non-dégénérée

On rappelle la définition de l'algèbre associée à une forme bilinéaire non-dégénérée, introduite par Dubois-Violette et Launer dans [27] :

Définition 11.1. Soit $E \in GL_n(\mathbb{C})$. On pose

$$\mathcal{B}(E) = \mathbb{C} < x_{ij}, 1 \leq i, j \leq n \mid E^{-1}x^tEx = I_n = xE^{-1}x^tE >$$

où $x = (x_{ij})$.

On a vu dans l'exemple 1.11 que cette algèbre peut être canoniquement munie d'une structure d'algèbre de Hopf qui possède alors la propriété universelle suivante qui justifie qu'on la considère comme l'algèbre de fonctions du groupe quantique de la forme bilinéaire induite par E.

Proposition 11.2.

1. *Soit $V = \mathbb{C}^n$ muni de la base canonique $(v_i)_{1\leq i\leq n}$. Munissons V d'une structure de $\mathcal{B}(E)$-comodule avec la coaction $\alpha_V(v_i) = \sum_{j=1}^n v_j \otimes x_{ji}$, $1 \leq i \leq n$.*
   Alors l'application linéaire $e : V \otimes V \to \mathbb{C}$ définie par $e(v_i \otimes v_j) = E_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$, où $E = (E_{ij})$, est un morphisme de $\mathcal{B}(E)$-comodules.
2. *Soit H une algèbre de Hopf et soit (V, α_V) un H-comodule de dimension finie n. Soit $e : V \otimes V \to \mathbb{C}$ un morphisme de H-comodule tel que la forme bilinéaire associée soit non-dégénérée. Alors il existe $E \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que V soit un $\mathcal{B}(E)$-comodule (pour la coaction notée α'_V), e un morphisme de $\mathcal{B}(E)$-comodules, et il existe un unique morphisme d'algèbres de Hopf $\phi : \mathcal{B}(E) \to H$ tel que $(id_V \otimes \phi) \circ \alpha_V = \alpha'_V$.*

Nous allons étudier certaines propriétés de l'algèbre $\mathcal{B}(E)$. Rappelons quelques résultats. Au niveau des algèbres de Hopf, on a la classification suivante (voir [13])

Théorème 11.3. *Soient $E \in GL_n(\mathbb{C})$ et $F \in GL_m(\mathbb{C})$. On a équivalence entre :*

1. *On a un isomorphisme d'algèbres de Hopf $\mathcal{B}(E) \simeq \mathcal{B}(F)$.*
2. *$n = m$ et il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $E = PFP^t$.*

Au niveau de la (co)homologie de Hochschild, on a la dualité suivante, voir [16].

Théorème 11.4. *Soit M un $\mathcal{B}(E)$-bimodule. Alors pour tout $n \in \{0,1,2,3\}$, on a des isomorphismes*
$$H^n(\mathcal{B}(E), M) \simeq H_{3-n}(\mathcal{B}(E), {}_{\sigma}M)$$
où $\sigma : \mathcal{B}(E) \to \mathcal{B}(E)$ est l'automorphisme modulaire défini par $\sigma(x) = E^{-1}E^t x E^{-1} E^t$.

Si $M = \mathcal{B}(E)$ et pour $n \in \mathbb{N}$, on notera $H^n(\mathcal{B}(E), \mathcal{B}(E)) = HH^n(\mathcal{B}(E))$ et $H_n(\mathcal{B}(E), \mathcal{B}(E)) = HH_n(\mathcal{B}(E))$.

11.2 Une base de $\mathcal{B}(E)$

Soit $E \in GL_n(\mathbb{C})$. On va utiliser le lemme du diamant [11] pour obtenir une base de monômes pour l'algèbre $\mathcal{B}(E)$.

On aura besoin du lemme suivant.

Lemme 11.5. *Soit $E = (E_{ij}) \in GL_n(\mathbb{C})$ $(n \geq 3)$. Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $(P^t E P)_{nn} = 0 = ((P^t E P)^{-1})_{nn}$.*

Démonstration. Soient $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Définissons les matrices suivantes :

$$\Gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & (-1)^{k+1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & (-1)^k \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \iddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \iddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix} \in GL_k(\mathbb{C}),$$

$$H_{2k}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ J_k(\lambda) & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_{2k} = \begin{pmatrix} \Gamma_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Gamma_2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \Gamma_2 \end{pmatrix} \in GL_{2k}(\mathbb{C}).$$

D'après [35], une matrice $E \in GL_n(\mathbb{C})$ est congruente à une somme directe de blocs de la forme Γ_k et $H_{2k}(\lambda)$ ($k \geq 1$, $\lambda \notin \{0, (-1)^{k+1}\}$). Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs et à l'échange $\lambda \leftrightarrow \lambda^{-1}$. En considérant $E \in GL_n(\mathbb{C})$ à congruence près, les seules situations problématiques sont celles où la somme directe ne contient que des blocs de la forme Γ_1, Γ_2. Plus précisement, on distingue 4 cas :

- Si $E \in GL_n(\mathbb{C})$ contient un bloc de la forme $H_{2k}(\lambda)$ ($\lambda \notin \{0, (-1)^{k+1}\}$) avec $k \geq 1$ (resp. un bloc Γ_k avec $k \geq 3$). Dans ce cas, on peut permuter les membres de la somme directe de manière à avoir $E_{nn} = H_{2k}(\lambda)_{2k2k} = 0$ et $(E^{-1})_{nn} = ((H_{2k}(\lambda))^{-1})_{2k2k} = 0$, (resp. $E_{nn} = (\Gamma_k)_{kk} = 0$ et $(E^{-1})_{nn} = ((\Gamma_k)^{-1})_{kk} = 0$).
- Si $E = I_n$, soient
$$Q = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}.$$
Dans ce cas, $(P^t P)_{nn} = 0 = ((P^t P)^{-1})_{nn}$.

– Si $E = \Lambda_{2k}$, soient

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} I_{n-3} & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, $(P^tEP)_{nn} = 0 = ((P^tEP)^{-1})_{nn}$.

– Si $E = \begin{pmatrix} I_{n-2k} & 0 \\ 0 & \Gamma_{2k} \end{pmatrix}$ avec $2k \neq 0, n$, on permute les membres de la somme directe de manière à avoir une matrice de la forme $E = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \end{pmatrix}$.

Soient

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} I_{n-3} & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, $(P^tEP)_{nn} = 0 = ((P^tEP)^{-1})_{nn}$.

□

Munissons $\{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}$ de l'ordre lexicographique et notons (n,u) et (n,v) les éléments maximaux de $\{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}$ tels que $E_{nu} \neq 0$ et $E^{-1}_{nv} \neq 0$. En particulier, en combinant le théorème 11.3 et le lemme 11.5, on peut supposer que l'on a $u, v < n$. Définissons l'ensemble d'indices

$$\mathrm{Ind}(E) := \{I = \big((i_1,j_1),\ldots,(i_m,j_m)\big); (i_t,i_{t+1}) \neq (n,u), (j_t,j_{t+1}) \neq (n,v)\}$$

et pour $I = \big((i_1,j_1),\ldots,(i_m,j_m)\big) \in \mathrm{Ind}(E)$, on note $x_I := x_{i_1j_1}\ldots x_{i_mj_m}$. On peut alors énoncer le résultat suivant :

Proposition 11.6. *Soit $E \in GL_n(\mathbb{C})$ $(n \geq 3)$. La famille $(x_I)_{I\in\mathrm{Ind}(E)}$ est une base de $\mathcal{B}(E)$.*

Démonstration. On donne d'abord une nouvelle présentation de l'algèbre $\mathcal{B}(E)$. Notons $E = (\alpha_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $E^{-1} = (\beta_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. L'algèbre $\mathcal{B}(E)$ est alors l'algèbre libre engendrée par les coefficients $x_{ij}, 1 \leq i,j \leq n$, soumis aux relations

$$\begin{cases} x_{ni}x_{uj} = \alpha_{nu}^{-1}\big(\alpha_{ij} - \sum\limits_{(k,l)<(n,u)} \alpha_{kl}x_{ki}x_{lj}\big) \\ x_{in}x_{jv} = \beta_{nv}^{-1}\big(\beta_{ij} - \sum\limits_{(p,q)<(n,v)} \beta_{pq}x_{ip}x_{jq}\big) \end{cases}$$

On munit l'ensemble des générateurs $x_{ij}, 1 \leq i,j \leq n$, de l'ordre induit par l'ordre lexicographique sur $\{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}$. 2 monômes sont ordonnés suivant leurs tailles et 2 monômes de même taille sont ordonnés suivant l'ordre lexicographique induit. Il est clair que cet ordre est compatible avec la nouvelle présentation et qu'il s'agit d'un ordre total. On a l'ambigüité d'inclusion

$$(x_{nn}x_{uv}, x_{nn}x_{uv})$$

et les ambigüités de recouvrement

$$(x_{ni}x_{un}, x_{un}x_{jv}), \quad (x_{in}x_{nv}, x_{nv}x_{uj}).$$

Notons que si u ou $v = n$, il y aurait davantage d'ambigüités. Montrons qu'elles sont résolubles. On note les réductions par $\to$. Commençons par l'ambigüité $(x_{nn}x_{uv}, x_{nn}x_{uv})$. D'un coté, on a :

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{nu}^{-1}\big(\alpha_{nv} - \sum_{(k,l)<(n,u)} \alpha_{kl} x_{kn} x_{lv}\big) \\
\to &(\alpha_{nu}\beta_{nv})^{-1}\big(\alpha_{nv}\beta_{nv} - \sum_{(k,l)<(n,u)} \alpha_{kl}(\beta_{kl} - \sum_{(p,q)<(n,v)} \beta_{pq} x_{kp} x_{lq})\big) \\
= &(\alpha_{nu}\beta_{nv})^{-1}\big(\alpha_{nv}\beta_{nv} - \sum_{(k,l)<(n,u)} \alpha_{kl}\beta_{kl} + \sum_{(k,l)<(n,u)} \sum_{(p,q)<(n,v)} \alpha_{kl}\beta_{pq} x_{kp} x_{lq})\big) \\
= &(\alpha_{nu}\beta_{nv})^{-1}\big(\alpha_{nv}\beta_{nv} + \alpha_{nu}\beta_{nu} - \operatorname{tr}(E^{-1}E^t) + \sum_{(k,l)<(n,u)} \sum_{(p,q)<(n,v)} \alpha_{kl}\beta_{pq} x_{kp} x_{lq})\big)
\end{aligned}
$$

et de l'autre coté, on a :

$$
\begin{aligned}
&\beta_{nv}^{-1}\big(\beta_{nu} - \sum_{(p,q)<(n,v)} \beta_{pq} x_{np} x_{uq}\big) \\
\to &(\alpha_{nu}\beta_{nv})^{-1}\big(\alpha_{nu}\beta_{nu} - \sum_{(p,q)<(n,v)} \beta_{pq}(\alpha_{pq} - \sum_{(k,l)<(n,u)} \alpha_{kl} x_{kp} x_{lq})\big) \\
= &(\alpha_{nu}\beta_{nv})^{-1}\big(\alpha_{nu}\beta_{nu} - \sum_{(p,q)<(n,v)} \beta_{pq}\alpha_{pq} + \sum_{(k,l)<(n,u)} \sum_{(p,q)<(n,v)} \alpha_{kl}\beta_{pq} x_{kp} x_{lq})\big) \\
= &(\alpha_{nu}\beta_{nv})^{-1}\big(\alpha_{nv}\beta_{nv} + \alpha_{nu}\beta_{nu} - \operatorname{tr}(E^{-1}E^t) + \sum_{(k,l)<(n,u)} \sum_{(p,q)<(n,v)} \alpha_{kl}\beta_{pq} x_{kp} x_{lq})\big)
\end{aligned}
$$

Ainsi, l'ambigüité $(x_{nn}x_{uv}, x_{nn}x_{uv})$ est résoluble. Examinons maintenant l'ambigüité $(x_{ni}x_{un}, x_{un}x_{jv})$. D'un coté, on a :

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{nu}^{-1}\big(\alpha_{in} x_{jv} - \sum_{(k,l)<(n,u)} \alpha_{kl} x_{ki} x_{ln} x_{jv}\big) \\
\to &(\alpha_{nu}\beta_{nv})^{-1}\big(\alpha_{in}\beta_{nv} x_{jv} - \sum_{(k,l)<(n,u)} \alpha_{kl} x_{ki}(\beta_{lj} - \sum_{(p,q)<(n,v)} \beta_{pq} x_{lp} x_{jq})\big) \\
= &(\alpha_{nu}\beta_{nv})^{-1}\big(\alpha_{in}\beta_{nv} x_{jv} + \alpha_{nu}\beta_{uj} x_{ni} - x_{ij} + \sum_{(k,l)<(n,u)} \sum_{(p,q)<(n,v)} \alpha_{kl}\beta_{pq} x_{lp} x_{jq})\big)
\end{aligned}
$$

et de l'autre coté, on a :

$$
\begin{aligned}
&\beta_{uj}^{-1}\big(\beta_{uj} x_{ni} - \sum_{(p,q)<(n,v)} \beta_{pq} x_{ni} x_{up} x_{jq}\big) \\
\to &(\alpha_{nu}\beta_{uj})^{-1}\big(\alpha_{nu}\beta_{uj} x_{ni} - \sum_{(p,q)<(n,v)} \beta_{pq}(\alpha_{ip} - \sum_{(k,l)<(n,u)} \alpha_{kl} x_{ki} x_{lp}) x_{jq}\big) \\
= &(\alpha_{nu}\beta_{nv})^{-1}\big(\alpha_{in}\beta_{nv} x_{jv} + \alpha_{nu}\beta_{uj} x_{ni} - x_{ij} + \sum_{(k,l)<(n,u)} \sum_{(p,q)<(n,v)} \alpha_{kl}\beta_{pq} x_{lp} x_{jq})\big)
\end{aligned}
$$

Ainsi, l'ambigüité $(x_{ni}x_{un}, x_{un}x_{jv})$ est résoluble. Des calculs similaires montrent que l'ambigüité restante $(x_{in}x_{nv}, x_{nv}x_{uj})$ est elle aussi résoluble. Ainsi, le lemme du diamant assure que l'ensemble des monômes réduits est une base de $\mathcal{B}(E)$. Or les monômes réduits sont exactement les $(x_I)_{I\in \operatorname{Ind}(E)}$. $\square$

D'après la proposition 11.6, pour $\varphi \in \mathcal{B}(E)$ non nul, on peut écrire de façon unique

$$\varphi = c_I x_I + \sum_{J<I} c_J x_J$$

où $I, J \in \mathrm{Ind}(E)$ et $c_I \neq 0$. On appelle cette décomposition la forme standard de φ et on dit que $c_I x_I$ est le terme dominant de φ.

11.3 Le centre de $\mathcal{B}(E)$

On peut maintenant utiliser la proposition 11.6 pour calculer le centre de $\mathcal{B}(E)$, dont la trivialité est connue pour certaines matrices. Voir [49] et [28] pour le cas $n = 2$ ainsi que [64] pour des cas particuliers de matrices. On utilise essentiellement les techniques de [49], Theorem 1.6.

Théorème 11.7. *Soit $n \geq 3$ un entier et soit $E \in GL_n(\mathbb{C})$. Alors*

$$\mathrm{Z}(\mathcal{B}(E)) = \mathbb{C}.1.$$

Démonstration. On conserve les conventions définies précédemment concernant l'ensemble des monômes réduits.

Soit $\varphi \in \mathrm{Z}(\mathcal{B}(E))$ de taille k et de terme dominant $c_I x_I$, avec $I = ((i_1, j_1), \ldots, (i_k, j_k))$. Supposons d'abord que les (i_p, j_p) ne sont pas égaux 2-à-2, c'est-à-dire que $x_I \neq x_{i_1 j_1}^k$. Puisque $n \geq 3$, il existe $1 \leq i, j \leq 2$ tels que $x_{ij} x_{i_1 j_1}$ et $x_{i_k j_k} x_{ij}$ sont des monômes réduits. Dans ce cas, le terme dominant de $x_{ij}\varphi$ est $c_I x_{ij} x_I$ et celui de φx_{ij} est $c_I x_I x_{ij}$. Puisque φ est central, on a $c_I x_{ij} x_I = c_I x_I x_{ij}$ et puisque $x_{ij} x_I$ et $x_I x_{ij}$ sont des monômes réduits et sont linéairement indépendants d'après la proposition 11.6, ceci n'est possible que si $x_I = 1$. Ainsi, $\varphi \in \mathbb{C}.1$. Maintenant, supposons que $(i_1, j_1) = \cdots = (i_k, j_k)$ et que $x_I = x_{i_1 j_1}^k$. Puisque $n \geq 3$, il existe $1 \leq i, j \leq 2$ tels que $(i, j) \neq (i_1, j_1)$ et $x_{ij} x_{i_1 j_1}$ et $x_{i_1 j_1} x_{ij}$ soient des mônomes réduits. On conclut comme précedemment. $\square$

Notons que dans [64], la trivialité du centre de $\mathcal{B}(E)$ est une conséquence d'un résultat *a priori* plus général. En effet, Vaes et Vergnioux s'intéressent à la factorialité de l'algèbre de Von Neumann associée au groupe quantique orthogonal $A_o(F)$ ($F \in GL_n(\mathbb{C})$), qui est prouvée dans des cas particuliers.

11.4 Quelques calculs d'homologie

Le corollaire suivant est une reformulation du théorème 11.7 :

Corollaire 11.8. *Soient $n \geq 3$ et $E \in GL_n(\mathbb{C})$. Alors*

$$HH^0(\mathcal{B}(E)) \simeq \mathbb{C}.$$

On peut en fait modifier légèrement la preuve du théorème 11.7 pour calculer $HH_3(\mathcal{B}(E))$.

Théorème 11.9. *Soient $n \geq 3$ et $E \in GL_n(\mathbb{C})$. Alors*

$$HH_3(\mathcal{B}(E)) \simeq \begin{cases} \mathbb{C} & \textit{si } E \textit{ est symétrique ou anti-symétrique,} \\ (0) & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. D'après le théorème 11.4, il suffit de calculer

$$HH^0(\mathcal{B}(E),\ {}_{\sigma^{-1}}\mathcal{B}(E)) \simeq \{m \in \mathcal{B}(E); am = m\sigma(a) \ \ \forall\ a \in \mathcal{B}(E)\} := \mathrm{Z}_\sigma(\mathcal{B}(E)).$$

Si E est symétrique ou antisymétrique, $\sigma = \mathrm{id}_{\mathcal{B}(E)}$ et $\mathrm{Z}_\sigma(\mathcal{B}(E)) = \mathrm{Z}(\mathcal{B}(E)) = \mathbb{C}$ d'après le théorème 11.7.

Supposons que E n'est ni symétrique ni antisymétrique. D'après le théorème 11.3, on peut supposer que la matrice $A := E^{-1}E^t$ est sous forme de Jordan. Soit x_{ij} un générateur de $\mathcal{B}(E)$. Alors la forme standard de $\sigma(x_{ij})$ est

$$\sigma(x_{ij}) = \sum_{k,l} A_{ik}A_{lj}x_{kl} = A_{jj}x_{i+1j} + (x_{i+1,j-1} + A_{ii}A_{jj}x_{ij} + A_{ii}x_{ij+1}).$$

Soit $\varphi \in \mathcal{B}(E)$ non-nul de terme dominant $c_I x_I$. Puisque $n \geq 3$, il existe $1 \leq i, j \leq 2$ tels que le terme dominant de $x_{ij}\varphi$ soit $c_I x_{ij} x_I$ et celui de $\varphi\sigma(x_{ij})$ soit $A_{jj}c_I x_I x_{i+1j}$. Si $\varphi \in \mathrm{Z}_\sigma(\mathcal{B}(E))$, on a alors l'égalité $c_I x_{ij} x_I = A_{jj} c_I x_I x_{i+1j}$, ce qui est absurde. Ainsi, $\mathrm{Z}_\sigma(\mathcal{B}(E)) = (0)$. $\square$

Bibliographie

[1] N. Andruskiewitsch and W. F. Santos. The beginnings of the theory of Hopf algebras. *Acta Appl. Math.*, 108(1) :3–17, 2009.

[2] T. Aubriot. On the classification of Galois objects over the quantum group of a nondegenerate bilinear form. *Manuscripta Math.*, 122(1) :119–135, 2007.

[3] T. Banica. Théorie des représentations du groupe quantique compact libre O(n). *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 322(3) :241–244, 1996.

[4] T. Banica. Le groupe quantique compact libre $U(n)$. *Comm. Math. Phys.*, 190(1) :143–172, 1997.

[5] T. Banica. A reconstruction result for the R-matrix quantizations of $SU(N)$. *Arxiv preprint arxiv :9806063v3*, 1998.

[6] T. Banica. Symmetries of a generic coaction. *Math. Ann.*, 314(4) :763–780, 1999.

[7] T. Banica. Quantum groups and Fuss-Catalan algebras. *Comm. Math. Phys.*, 226(1) :221–232, 2002.

[8] T. Banica. Quantum permutations, Hadamard matrices, and the search for matrix models. *Banach Center Publ.*, 98 :11–42, 2012.

[9] T. Banica and J. Bichon. Quantum groups acting on 4 points. *J. Reine Angew. Math.*, 626 :75–114, 2009.

[10] T. Banica, J. Bichon, B. Collins, and S. Curran. A maximality result for orthogonal quantum groups. *Comm. Algebra*, 41(2) :656–665, 2013.

[11] G. Bergman. The diamond lemma for ring theory. *Adv. Math.*, 29(2) :178–218, 1978.

[12] J. Bichon. Cosovereign Hopf algebras. *J. Pure Appl. Math.*, 157 :121 – 133, 2001.

[13] J. Bichon. The representation category of the quantum group of a non-degenerate bilinear form. *Comm. Algebra*, 31(10) :4831–4851, 2003.

[14] J. Bichon. Co-representation theory of universal co-sovereign Hopf algebras. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 75(1) :83–98, 2007.

[15] J. Bichon. Hopf-Galois objects and cogroupoids. *Arxiv preprint arXiv :1006.3014*, 2010.

[16] J. Bichon. Hochschild homology of Hopf algebras and free Yetter-Drinfeld resolutions of the counit. *Compos. Math.*, 149 :658–678, 2013.

[17] J. Bichon and G. Carnovale. Lazy cohomology : an analogue of the Schur multiplier for arbitrary Hopf algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 204(3) :627–665, 2006.

[18] J. Bichon, A. De Rijdt, and S. Vaes. Ergodic coactions with large multiplicity and monoidal equivalence of quantum groups. *Comm. Math. Phys.*, 262(3) :703–728, 2006.

[19] J. Bichon and S. Natale. Hopf algebra deformations of binary polyhedral groups. *Transform. Groups*, 16(2) :339–374, 2011.

[20] M. Brannan. Reduced operator algebras of trace-preserving quantum automorphism groups. *Arxiv preprint arXiv :1202.5020v3*, 2012.

[21] A. Bruguières. Théorie tannakienne non commutative. *Comm. Alg.*, 22(14) :5817–5860, 1994.

[22] A. De Rijdt and N. Vander Vennet. Actions of monoidally equivalent compact quantum groups and applications to probabilistic boundaries. *Ann. Inst. Fourier*, 60(1) :169–216, 2010.

[23] M. S. Dijkhuizen. The double covering of the quantum group $\mathrm{SO}_q(3)$. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.*, (37) :47–57, 1994. Geometry and physics (Zdíkov, 1993).

[24] J. Dixmier. *Enveloping algebras*, volume 11 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. Revised reprint of the 1977 translation.

[25] Y. Doi. Braided bialgebras and quadratic bialgebras. *Comm. Algebra*, 21(5) :1731–1749, 1993.

[26] V. G. Drinfel'd. Quantum groups. In *Proc. Intern. Congr. Math.*, volume 1,2.

[27] M. Dubois-Violette and G. Launer. The quantum group of a nondegenerate bilinear form. *Phys. Lett. B*, 245(2) :175–177, 1990.

[28] F. Dumas and L. Rigal. Prime spectrum and automorphisms for 2×2 Jordanian matrices. *Comm. Algebra*, 30(6) :2805–2828, 2002.

[29] E.G. Effros and Z.-J. Ruan. Discrete quantum groups I : The Haar measure. *Inte. J. Math.*, 5(05) :681–723, 1994.

[30] P. Etingof and S. Gelaki. On cotriangular Hopf algebras. *Amer. J. Math.*, 123(4) :699–713, 2001.

[31] L. D. Faddeev, N. Yu. Reshetikhin, and L. A. Takhtajan. Quantization of Lie groups and Lie algebras. In *Algebraic analysis, Vol. I*, pages 129–139. Academic Press, Boston, MA, 1988.

[32] D. I. Gurevich. Algebraic aspects of the quantum Yang-Baxter equation. *Leningrad Math. J.*, 2(4) :801–828, 1991.

[33] P.H. Hai. On matrix quantum groups of type A_n. *Internat. J. Math.*, 11(9) :1115–1146, 2000.

[34] P. Hajac and T. Masuda. Quantum double-torus. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 327(6) :553–558, 1998.

[35] R. A. Horn and V.V. Sergeichuk. Canonical forms for complex matrix congruence and *congruence. *Linear Algebra Appl.*, 416(2-3) :1010–1032, 2006.

[36] M. Jimbo. A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation. *Lett. Math. Phys.*, 10(1) :63–69, 1985.

[37] A. Joyal and R. Street. An introduction to Tannaka duality and quantum groups. In *Category theory (Como, 1990)*, volume 1488 of *Lecture Notes in Math.*, pages 413–492. Springer, Berlin, 1991.

[38] C. Kassel. *Quantum groups*, volume 155 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[39] D. Kazhdan and H. Wenzl. Reconstructing monoidal categories. In *I. M. Gelfand Seminar*, volume 16 of *Adv. Soviet Math.*, pages 111–136. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[40] A. Klimyk and K. Schmüdgen. *Quantum groups and their representations*. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[41] P. Kondratowicz and P. Podleś. On representation theory of quantum $\mathrm{S}L_q(2)$ groups at roots of unity. In *Quantum groups and quantum spaces (Warsaw, 1995)*, volume 40 of *Banach Center Publ.*, pages 223–248. Polish Acad. Sci., Warsaw, 1997.

[42] J. Kustermans and S. Vaes. Locally compact quantum groups. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 33(6) :837–934, 2000.

[43] J. Kustermans and S. Vaes. Locally compact quantum groups in the von Neumann algebraic setting. *Math. Scand.*, 92(1) :68–92, 2003.

[44] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.

[45] J. R. McMullen. On the dual object of a compact connected group. *Math. Z.*, 185(4) :539–552, 1984.

[46] S. Montgomery. *Hopf algebras and their actions on rings*, volume 82 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1993.

[47] C. Mrozinski. Quantum groups of $GL(2)$ representation type. *Arxiv preprint arXiv :1201.3494v1, to appear in J. Noncommut. Geom.*

[48] C. Mrozinski. Quantum automorphism groups and $SO(3)$-deformations. *Arxiv preprint arXiv :1303.7091v1*, 2013.

[49] M. Noumi, H. Yamada, and K. Mimachi. Finite dimensional representations of the quantum group $GL_q(n;\mathbb{C})$ and the zonal spherical functions on $U_q(n-1)\backslash U_q(n)$. *Japan. J. Math.*, 19(1) :31–80, 1993.

[50] C. Ohn. Quantum $SL(3,\mathbb{C})$'s with classical representation theory. *J. Algebra*, 213(2) :721–756, 1999.

[51] C. Ohn. A classification of quantum $GL(2,\mathbb{C})$'s. *Czechoslovak J. Phys.*, 50(11) :1323–1328, 2000. Quantum groups and integrable systems (Prague, 2000).

[52] C. Ohn. Quantum $SL(3,\mathbb{C})$'s : the missing case. In *Hopf algebras in noncommutative geometry and physics*, volume 239 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 245–255. Dekker, New York, 2005.

[53] P. Podleś and E. Müller. Introduction to quantum groups. *Rev. Math. Phys.*, 10(4) :511–551, 1998.

[54] M. Rosso. Algèbres enveloppantes quantifiées, groupes quantiques compacts de matrices et calcul différentiel non commutatif. *Duke Math. J.*, 61(1) :11–40, 1990.

[55] P. Schauenburg. Hopf bi-Galois extensions. *Comm. Algebra*, 24(12) :3797–3825, 1996.

[56] P. Schauenburg. Hopf-Galois and bi-Galois extensions. In *Galois theory, Hopf algebras, and semiabelian categories*, volume 43 of *Fields Inst. Commun.*, pages 469–515. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[57] H.J. Schneider. Principal homogeneous spaces for arbitrary Hopf algebras. *Israel J. Math.*, 72(1-2) :167–195, 1990.

[58] M. Takeuchi. Quantum orthogonal and symplectic groups and their embedding into quantum GL. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 65(2) :55–58, 1989.

[59] M. Takeuchi. Cocycle deformations of coordinate rings of quantum matrices. *J. Algebra*, 189(1) :23–33, 1997.

[60] D. Tambara. The coendomorphism bialgebra of an algebra. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 37(2) :425–456, 1990.

[61] I. Tuba and H. Wenzl. On braided tensor categories of type BCD. *J. Reine Angew. Math.*, 581 :31–69, 2005.

[62] K.-H. Ulbrich. Galois extensions as functors of comodules. *Manuscripta Math.*, 59(4) :391–397, 1987.

[63] K.-H. Ulbrich. Fibre functors of finite-dimensional comodules. *Manuscripta Math.*, 65(1) :39–46, 1989.

[64] S. Vaes and R. Vergnioux. The boundary of universal discrete quantum groups, exactness, and factoriality. *Duke Math. J.*, 140(1) :35–84, 2007.

[65] S. Wang. Free products of compact quantum groups. *Comm. Math. Phys.*, 167(3) :671–692, 1995.

[66] S. Wang. Quantum symmetry groups of finite spaces. *Comm. Math. Phys.*, 195(1) :195–211, 1998.

[67] W. C. Waterhouse. *Introduction to affine group schemes*. Springer, 1979.

[68] S. L. Woronowicz. Compact matrix pseudogroups. *Comm. Math. Phys*, 111 :613–665, 1987.

[69] S. L. Woronowicz. Tannaka-Kreĭn duality for compact matrix pseudogroups. Twisted $SU(N)$ groups. *Invent. Math.*, 93(1) :35–76, 1988.

[70] S. L. Woronowicz. New quantum deformation of $SL(2,\mathbb{C})$. Hopf algebra level. *Rep. Math. Phys.*, 30(2) :259–269 (1992), 1991.

[71] S. L. Woronowicz and S. Zakrzewski. Quantum deformations of the Lorentz group. The Hopf *-algebra level. *Compositio Math.*, 90(2) :211–243, 1994.

[72] S.L. Woronowicz. Compact quantum groups. *Symétries quantiques (Les Houches, 1995)*, 845 :884, 1998.